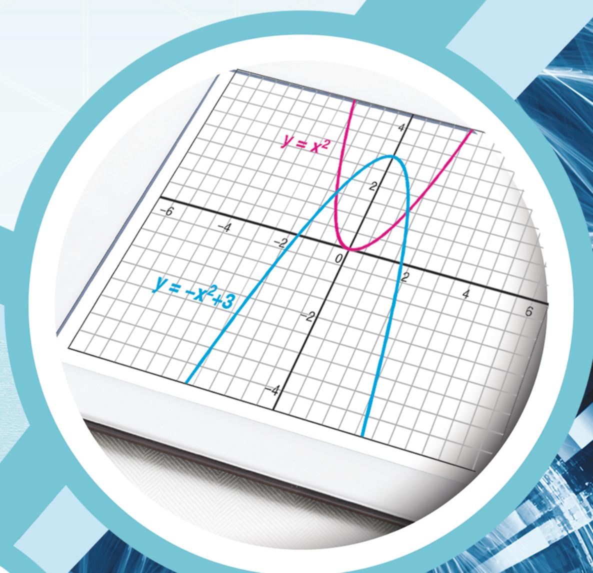
ORTAÖĞRETİM

MATEMATİK

DERS KİTABI

10



Aydın Yayınları

Ortaöğretim
MATEMATİK 10

DERS KİTABI

Nesibe AYDIN

Ahmet CAMUS

Mutlu KAYA

Bu kitap, Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı'nın **28.05.2018** tarih ve **78** sayılı Kurul kararıyla (listenin 217. sırasında) **2018 – 2019** öğretim yılından itibaren 5 (beş) yıl süreyle **ders kitabı** olarak kabul edilmiştir.

AYDIN YAYINCILIK VE EĞİTİM HİZMETLERİ İNŞ. TİC VE SAN. A. Ş.

Haymana Yolu 5. km. Karşıyaka Mah. 577. Sk. Nu.: 1 Gölbaşı / ANKARA

tel.: 0 312. 418 10 02 • belgeç: 0 312. 418 10 09

www.aydinyayincilik.com.tr

ISBN

978 – 605 – 9529 – 78 – 5
Sertifika No.: 16753

•

DİL UZMANI

Helin REÇBER

•

GÖRSEL TASARIM UZMANI

Bora SENGER

•

BASKI – CİLT

Özgün Matbaacılık San. ve Tic. A.Ş.

Ankara – Polatlı Karayolu 52. km

Gazi Mah. Özgün Cad. No.:4, Temelli / Sincan – ANKARA

tel.: 0 312. 645 19 10 belgeç: 0 312. 645 19 19
Matbaa Sertifika No: 44327

Ankara, 2019

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

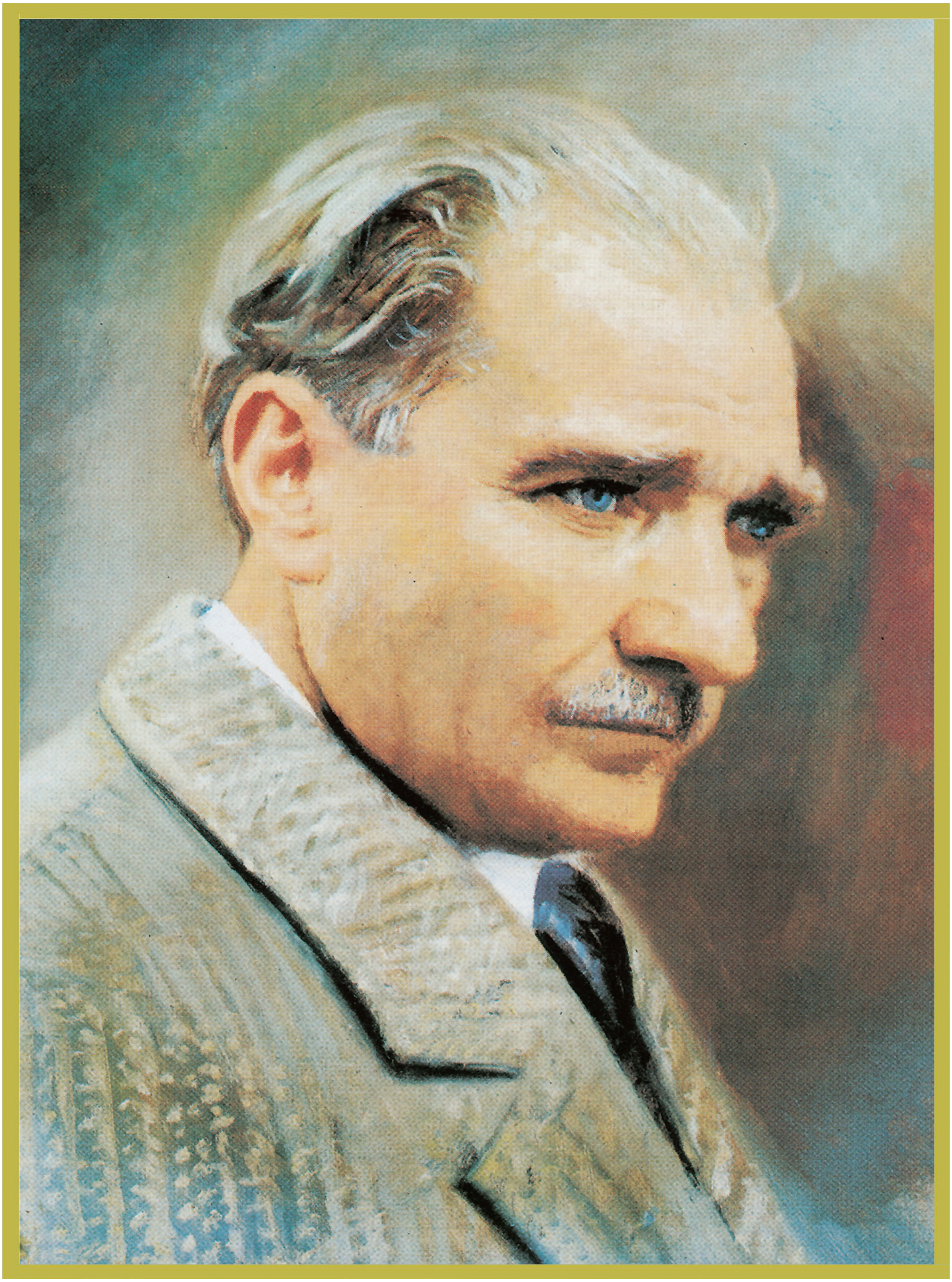
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

SEMBOLLER

Sembol	Anlamı
$\varnothing$, $\{\ \}$	boş küme
$\subset$	alt küme
A'	A kümesinin / olayının tümleyeni
$s(A)$	A kümesinin eleman sayısı
$\mathbb{N}$	doğal sayılar
$\mathbb{Z}$	tam sayılar
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar
$\mathbb{Q}'$	irrasyonel sayılar
$\mathbb{R}$	gerçek sayılar
$\mathbb{R}^+$	pozitif gerçek sayılar
$\mathbb{C}$	karmaşık sayılar
i	sanal birim
$<$	küçüktür
$\leq$	küçük veya eşittir
$>$	büyüktür
$\geq$	büyük veya eşittir
$\|x\|$	x in mutlak değeri
$[a, b]$	kapalı aralık
(a, b)	açık aralık
$[a, b)$, $(a, b]$	yarı açık aralık
x^n	x in n inci kuvveti
$n!$	n faktöriyel
$P(n, r)$	n nin r li permütasyonu
$C(n, r)$	n nin r li kombinasyonu
$\sqrt{\ }$	karekök

Sembol	Anlamı
$\%$	yüzde
$f: A \rightarrow B$	A dan B ye f fonksiyonu
$f(x)$	f(x) fonksiyonu
$P(x)$	P(x) polinomu
$der[P(x)]$	P(x) polinomunun derecesi
$\overset{\frown}{ABC}$	ABC üçgeni
$\widehat{ABC}$	ABC açısı
$m(\widehat{ABC})$	ABC açısının ölçüsü
$Ç(\overset{\frown}{ABC})$	ABC üçgeninin çevresi
$A(\overset{\frown}{ABC})$	ABC üçgeninin alanı
$[AB]$	AB doğru parçası
$\|AB\|$	AB doğru parçasının uzunluğu
$=$	eşit
$\neq$	eşit değil
$\cong$	yaklaşık
E	evrensel küme, örnek uzay
$P(A)$	A olayının olma olasılığı
$\Rightarrow$	ise
$//$	paralellik
$\perp$	diklik
$A(x, y)$	A noktasının koordinatları
Δ	delta
$-\infty$	eksi sonsuz
$+\infty$	artı sonsuz

İÇİNDEKİLER

1. ÜNİTE

2. ÜNİTE

3. ÜNİTE

4. ÜNİTE

5. ÜNİTE

6. ÜNİTE

KİTABIMIZI TANIYALIM

ÖNCEKİ BİLGİLERİNİ TEST ET

İlgili bölüme başlamadan önce hazır bulunuşluğunuzu belirlemenize yardımcı olacak sorular bu başlık altında verilmiştir.

1. Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini yazınız.

a. $\frac{6.5.4.3.2}{8.7.6.5}$ b. $\frac{10.9.8.7}{6.5.4.3}$ c. $\frac{11.10.9.8}{5.4.3.2}$ d. $\frac{24.23.22.21}{12.11.10.9}$

2. Aşağıdaki ifadeleri ortak çarpan parantezine alınız.

a. $3x + 3x^2$ b. $ax + ay + ax^2 - ay^2$

c. $n + 1 + (n+1)^2$ d. $3ax^2 + ax + 3a^2x$

3. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan n doğal sayılarını bulunuz.

a. $n^2 = 49$ b. $(n+1)^2 = 25$ c. $(2n+2)^2 = 16$

4. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını en sade şekilde yazınız.

a. $x^2.(x^{-3}).(x^3)^5$ b. $(2x)^2.(-3x)^3.x^{-5}$

5. Aşağıdaki eşitliklerdeki n değerlerini bulunuz.

a. $(x^3)^{8-n}.\left(\frac{1}{x}\right)^n = x^{12}$ b. $x^{\frac{8-n}{3}} \cdot x^{\frac{n}{2}} = x^3$

6. Bir torbada özdeş 6 mavi 4 sarı ve 2 beyaz top vardır. Buna göre aşağıdaki boşluklar uygun şekilde doldurunuz.

a. Torbadaki her bir topun çekilme olasılığı ....

b. Torbadan çekilme olasılığı en yüksek olan renk ....

c. Torbadan çekilme olasılığı en .... olan renk beyazdır.

d. Torbadan çekilen bir topun .... olma olasılığı ile mavi dışında bir renk olma olasılığı eşittir.

7. Hilesiz bir zar atıldığında,

a. Gelebilecek sayıların kümesini yazınız.

b. 3 gelme olasılığını bulunuz.

c. Tek sayı gelme olasılığını bulunuz.

d. 3 ten büyük gelme olasılığı ile 3 ten küçük gelme olasılığını karşılaştırınız.

e. En az 1 gelme olasılığı hangi tur olaydır?

f. En çok 6 gelme olasılığı hangi tür olaydır?

2

İlgili bölümde geçen yeni terimlerin bulunduğu bölümdür.

Her işlenişin başında konuya merakınızı arttıracak bilgi veya sorulara yer verilmiştir.

İlgili bölümde geçen sembol ve gösterimler yer alır.

SIRALAMA VE SEÇME

BÖLÜM 1.1

Sayma Yöntemleri

Genel anlamıyla değerli eşyaları korumaya yarayan, çeşitli tarzlarda kilitler içeren sağlam kutulara kasa denir.

Bir iş yeri sahibi odasında bulunan şifreli kasası için dört haneli bir şifre oluşturuyor. Şifrenin unutulması durumunda kaç farklı deneme yapılması gerektiğini nasıl bulabiliriz?

TERİMLER

- Toplama yöntemi
- Çarpma yöntemi
- Faktöriyel
- Permütasyon
- Kombinasyon
- Pascal üçgeni
- Binom açılımı

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

- $n!$
- $P(n, r)$
- $C(n, r)$
- $\binom{n}{r}$
- $(x+y)^n$

Toplama Yöntem ile Sayma	A ve B sonlu ayrık iki küme olduğunda, $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre iki ayrık kümenin eleman sayısı **toplama yöntemiyle** bulunmuş olur. Benzer şekilde bir A olayı n_1 farklı yolla, B olayı n_2 farklı yolla gerçekleşiyorsa A veya B olayı $n_1 + n_2$ farklı yolla gerçekleşir.

1. Örnek

Mert'in 3 spor ayakkabısı, 2 günlük ayakkabısı ve 3 botu vardır. Mert bunlardan birini ihtiyaç sahiplerine ulaştırmak üzere bir yardımlaşma derneğine bağışlayacaktır. Bunun için kaç farklı seçim yapabileceğini bulalım.

Ayakkabı seçiminin kaç farklı biçimde yapılabileceğini bulmak için farklı türdeki ayakkabı sayıları toplamalıyız.

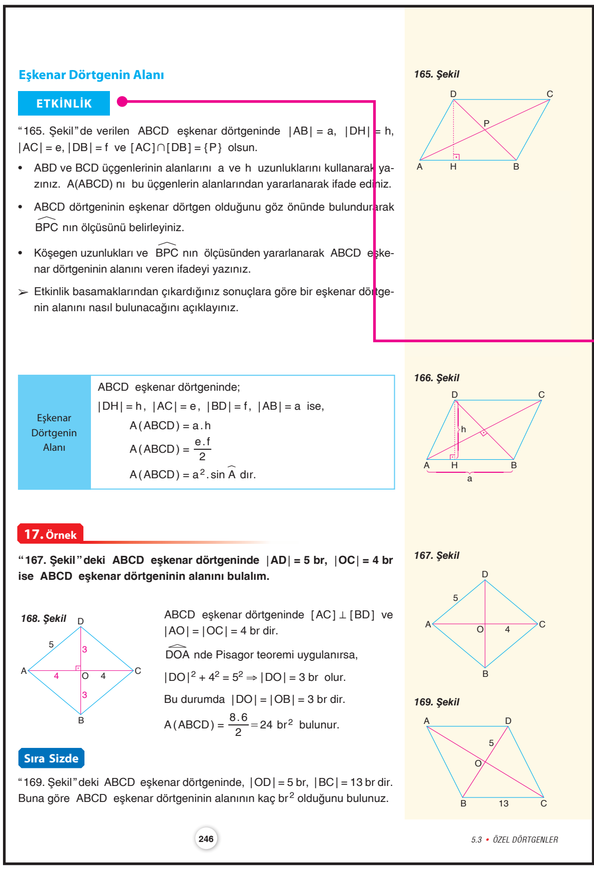
$3 + 2 + 3 = 8$ olur.

Buna göre Mert, 8 farklı seçim yapabilir. Burada Mert'in yapabileceği farklı seçim sayısını "toplama yoluyla sayma" yöntemini kullanarak bulmuş olduk.

Sıra Sizde

Aynur 8 farklı şiir kitabı, 3 farklı roman ve 4 farklı hikâye kitabından birini seçip okumak istiyor. Aynur seçimini kaç farklı biçimde yapabilir?

3 1.1 • SIRALAMA VE SEÇME



Eşkenar Dörtgenin Alanı

ETKİNLİK

“165. Şekil” de verilen ABCD eşkenar dörtgeninde $|AB| = a$, $|DH| = h$, $|AC| = e$, $|DB| = f$ ve $[AC] \cap [DB] = \{P\}$ olsun.

- ABD ve BCD üçgenlerinin alanlarını a ve h uzunluklarını kullanarak yazınız. A(ABCD) nı bu üçgenlerin alanlarından yararlanarak ifade ediniz.
- ABCD dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu göz önünde bulundurarak $\widehat{BPC}$ nın ölçüsünü belirleyiniz.
- Köşegen uzunlukları ve $\widehat{BPC}$ nın ölçüsünden yararlanarak ABCD eşkenar dörtgeninin alanını veren ifadeyi yazınız.

➢ Etkinlik basamaklarından çıkardığınız sonuçlara göre bir eşkenar dörtgenin alanını nasıl bulunacağını açıklayınız.

Eşkenar Dörtgenin Alanı	ABCD eşkenar dörtgeninde; $\|DH\| = h$, $\|AC\| = e$, $\|BD\| = f$, $\|AB\| = a$ ise, $A(ABCD) = a.h$, $A(ABCD) = \frac{e.f}{2}$, $A(ABCD) = a^2.\sin \widehat{A}$ dır.

17. Örnek

“167. Şekil” deki ABCD eşkenar dörtgeninde $|AD| = 5$ br, $|OC| = 4$ br ise ABCD eşkenar dörtgeninin alanını bulalım.

168. Şekil

ABCD eşkenar dörtgeninde $[AC] \perp [BD]$ ve $|AO| = |OC| = 4$ br dir.

$\widehat{DOA}$ nde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$|DO|^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow |DO| = 3$ br olur.

Bu durumda $|DO| = |OB| = 3$ br dir.

$A(ABCD) = \frac{8.6}{2} = 24$ br^2 bulunur.

Sıra Sizde

“169. Şekil” deki ABCD eşkenar dörtgeninde, $|OD| = 5$ br, $|BC| = 13$ br dir. Buna göre ABCD eşkenar dörtgeninin alanının kaç br^2 olduğunu bulunuz.

165. Şekil

166. Şekil

167. Şekil

169. Şekil

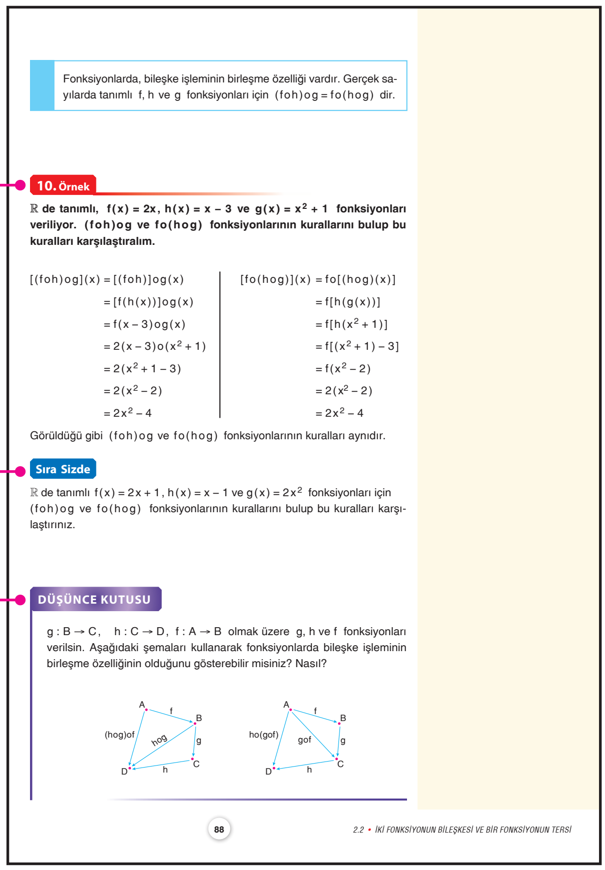
246 5.3 • ÖZEL DÖRTGENLER

Bu bölümde, tek başınıza yapabileceğiniz, keşfederek öğrenmenizi sağlayacak çeşitli etkinliklere yer verilmiştir. İlgili konudaki etkinlikleri yapmadan önce, o etkinliklerde kullanacağınız “Etkinlik” başlığının altında yer alan araç gereçleri bir gün önceden temin ediniz. Etkinlikleri yaptıktan sonra bulduğunuz sonuçları sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız. Arkadaşlarınızın önerilerini dikkate alınız.

Öncesinde açıklamalarını gördüğünüz konuların uygulamaları bu bölümde yer almaktadır. Her bölüme ait örnekler kendi içinde numaralandırılmıştır.

Örnekte yer alan problem veya alıştırmaların benzerleri bulunur. Bu soruları çözerken eksiklerinizin olduğunu tespit ederseniz çözümlü örnekleri tekrar gözden geçirebilirsiniz.

İşlenen konuyla ilgili düşündürücü soruları bu başlık altında bulabilirsiniz.



Fonksiyonlarda, bileşke işleminin birleşme özelliği vardır. Gerçek sayılarda tanımlı f, h ve g fonksiyonları için $(foh)og = fo(hog)$ dir.

10. Örnek

$\mathbb{R}$ de tanımlı, $f(x) = 2x$, $h(x) = x - 3$ ve $g(x) = x^2 + 1$ fonksiyonları veriliyor. $(foh)og$ ve $fo(hog)$ fonksiyonlarının kurallarını bulup bu kuralları karşılaştıralım.

$[(foh)og](x) = [(foh)]og(x) = [f(h(x))]og(x) = f(x-3)og(x) = 2(x-3)o(x^2+1) = 2(x^2+1-3) = 2(x^2-2) = 2x^2-4$

$[fo(hog)](x) = fo[(hog)(x)] = f[h(g(x))] = f[h(x^2+1)] = f[(x^2+1)-3] = f(x^2-2) = 2(x^2-2) = 2x^2-4$

Görüldüğü gibi $(foh)og$ ve $fo(hog)$ fonksiyonlarının kuralları aynıdır.

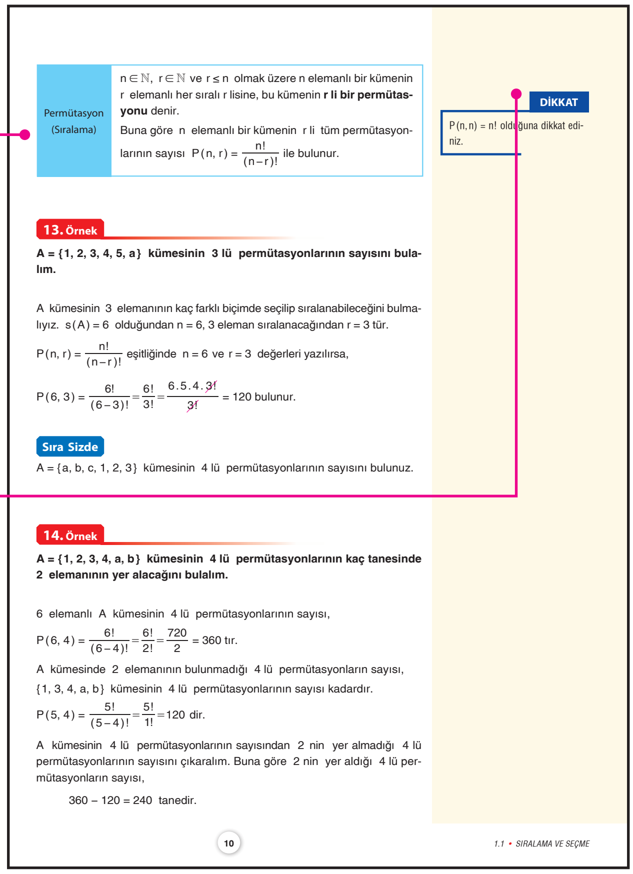
Sıra Sizde

$\mathbb{R}$ de tanımlı $f(x) = 2x + 1$, $h(x) = x - 1$ ve $g(x) = 2x^2$ fonksiyonları için $(foh)og$ ve $fo(hog)$ fonksiyonlarının kurallarını bulup bu kuralları karşılaştırınız.

DÜŞÜNCE KUTUSU

$g: B \to C$, $h: C \to D$, $f: A \to B$ olmak üzere g, h ve f fonksiyonları verilsin. Aşağıdaki şemaları kullanarak fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliğinin olduğunu gösterebilir misiniz? Nasıl?

88 2.2 • İKİ FONKSİYONUN BİLEŞKESİ VE BİR FONKSİYONUN TERSİ



Permütasyon (Sıralama)

$n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ ve $r \leq n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin r elemanlı her sıralı r lisine, bu kümenin **r li bir permütasyonu** denir.

Buna göre n elemanlı bir kümenin r li tüm permütasyonlarının sayısı $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ ile bulunur.

DİKKAT

$P(n, n) = n!$ olduğuna dikkat ediniz.

13. Örnek

A = {1, 2, 3, 4, 5, a} kümesinin 3 lü permütasyonlarının sayısını bulalım.

A kümesinin 3 elemanının kaç farklı biçimde seçilip sıralanabileceğini bulmalıyız. $s(A) = 6$ olduğundan $n = 6$, 3 eleman sıralanacağından $r = 3$ tür.

$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ eşitliğinde $n = 6$ ve $r = 3$ değerleri yazılırsa,

$P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 120$ bulunur.

Sıra Sizde

A = {a, b, c, 1, 2, 3} kümesinin 4 lü permütasyonlarının sayısını bulunuz.

14. Örnek

A = {1, 2, 3, 4, a, b} kümesinin 4 lü permütasyonlarının kaç tanesinde 2 elemanının yer alacağını bulalım.

6 elemanlı A kümesinin 4 lü permütasyonlarının sayısı,

$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$ tır.

A kümesinde 2 elemanının bulunmadığı 4 lü permütasyonların sayısı, {1, 3, 4, a, b} kümesinin 4 lü permütasyonlarının sayısı kadardır.

$P(5, 4) = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 120$ dir.

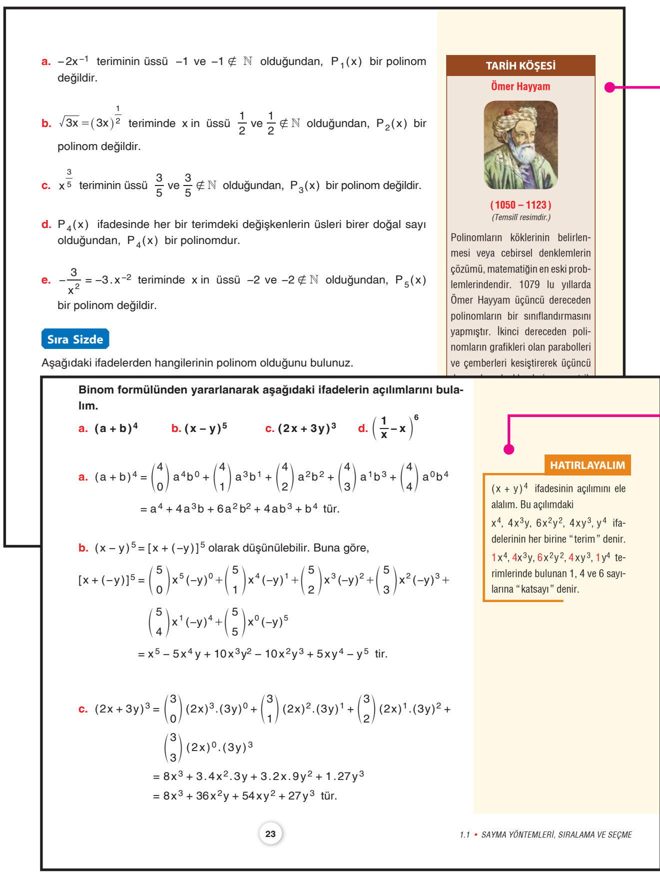
A kümesinin 4 lü permütasyonlarının sayısından 2 nin yer almadığı 4 lü permütasyonlarının sayısını çıkaralım. Buna göre 2 nin yer aldığı 4 lü permütasyonların sayısı,

$360 - 120 = 240$ tanedir.

10 1.1 • SIRALAMA VE SEÇME

Konularla ilgili en önemli özellikleri, kısa açıklamaları ya da dikkat etmeniz gereken noktaları bu bölümde bulabilirsiniz.

İşlenişle ilgili uyarıların verildiği, yönlendirmelerin ve oluşabilecek kavram yanılgılarıyla ilgili açıklamaları bu bölümde bulabilirsiniz.



a. $-2x^{-1}$ teriminin üssü -1 ve $-1 \notin \mathbb{N}$ olduğundan, $P_1(x)$ bir polinom değildir.

b. $\sqrt{3x} = (3x)^{\frac{1}{2}}$ teriminde x in üssü $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ olduğundan, $P_2(x)$ bir polinom değildir.

c. $x^{\frac{3}{5}}$ teriminin üssü $\frac{3}{5}$ ve $\frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$ olduğundan, $P_3(x)$ bir polinom değildir.

d. $P_4(x)$ ifadesinde her bir terimdeki değişkenlerin üsleri birer doğal sayı olduğundan, $P_4(x)$ bir polinomdur.

e. $-\frac{3}{x^2} = -3.x^{-2}$ teriminde x in üssü -2 ve $-2 \notin \mathbb{N}$ olduğundan, $P_5(x)$ bir polinom değildir.

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadelerden hangilerinin polinom olduğunu bulunuz.

TARİH KÖŞESİ

Ömer Hayyam

(1050 – 1123)

(Temsilî resimdir.)

Polinomların köklerinin belirlenmesi veya cebirsel denklemlerin çözümü, matematiğin en eski problemlerindendir. 1079 lu yıllarda Ömer Hayyam üçüncü dereceden polinomların bir sınıflandırmasını yapmıştır. İkinci dereceden polinomların grafikleri olan parabolleri ve çemberleri kesiştirerek üçüncü

Binom formülünden yararlanarak aşağıdaki ifadelerin açılımlarını bulalım.

a. $(a+b)^4$ **b.** $(x-y)^5$ **c.** $(2x+3y)^3$ **d.** $\left(\frac{1}{x}-x\right)^6$

a. $(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4$
$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ tür.

b. $(x-y)^5 = [x+(-y)]^5$ olarak düşünülebilir. Buna göre,

$[x+(-y)]^5 = \binom{5}{0}x^5(-y)^0 + \binom{5}{1}x^4(-y)^1 + \binom{5}{2}x^3(-y)^2 + \binom{5}{3}x^2(-y)^3 + \binom{5}{4}x^1(-y)^4 + \binom{5}{5}x^0(-y)^5$
$= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$ tir.

c. $(2x+3y)^3 = \binom{3}{0}(2x)^3.(3y)^0 + \binom{3}{1}(2x)^2.(3y)^1 + \binom{3}{2}(2x)^1.(3y)^2 + \binom{3}{3}(2x)^0.(3y)^3$
$= 8x^3 + 3.4x^2.3y + 3.2x.9y^2 + 1.27y^3$
$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ tür.

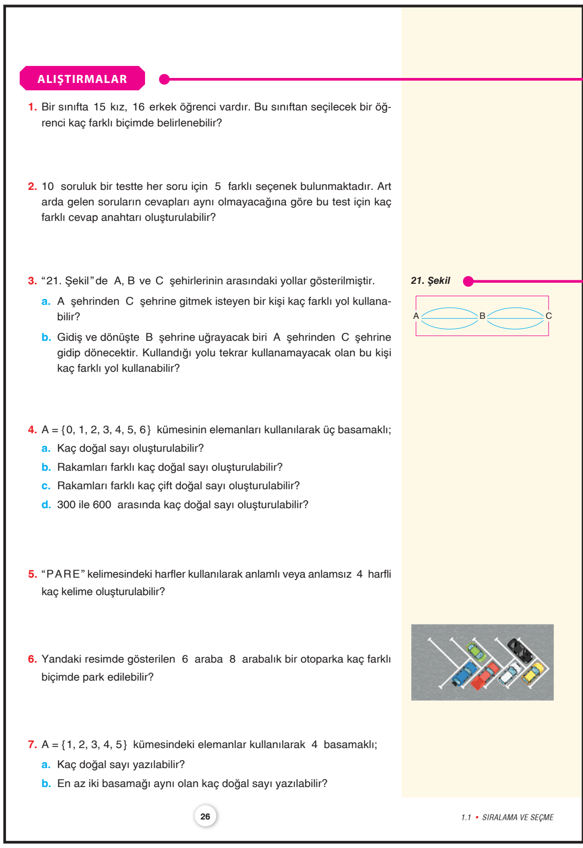
HATIRLAYALIM

$(x+y)^4$ ifadesinin açılımını ele alalım. Bu açılımdaki x^4, $4x^3y$, $6x^2y^2$, $4xy^3$, y^4 ifadelerinin her birine "terim" denir. $1x^4$, $4x^3y$, $6x^2y^2$, $4xy^3$, $1y^4$ terimlerinde bulunan 1, 4 ve 6 sayılarına "katsayı" denir.

23 1.1 • SAYMA YÖNTEMLERİ, SIRALAMA VE SEÇME

İşlenen konuya katkıda bulunmuş kişilerin hayatları ve çalışmalarıyla ilgili tarihsel bilgileri bu bölümde bulabilirsiniz.

Önceki yıllarda öğrendiğiniz bilgilerle ilgili hatırlatmaları bu bölümde bulabilirsiniz.



ALIŞTIRMALAR

1. Bir sınıfta 15 kız, 16 erkek öğrenci vardır. Bu sınıftan seçilecek bir öğrenci kaç farklı biçimde belirlenebilir?

2. 10 soruluk bir testte her soru için 5 farklı seçenek bulunmaktadır. Art arda gelen soruların cevapları aynı olmayacağına göre bu test için kaç farklı cevap anahtarı oluşturulabilir?

3. "21. Şekil" de A, B ve C şehirlerinin arasındaki yollar gösterilmiştir.
   a. A şehrinden C şehrine gitmek isteyen bir kişi kaç farklı yol kullanabilir?
   b. Gidiş ve dönüşte B şehrine uğrayacak biri A şehrinden C şehrine gidip dönecektir. Kullandığı yolu tekrar kullanamayacak olan bu kişi kaç farklı yol kullanabilir?

21. Şekil

4. A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} kümesinin elemanları kullanılarak üç basamaklı;
   a. Kaç doğal sayı oluşturulabilir?
   b. Rakamları farklı kaç doğal sayı oluşturulabilir?
   c. Rakamları farklı kaç çift doğal sayı oluşturulabilir?
   d. 300 ile 600 arasında kaç doğal sayı oluşturulabilir?

5. "PARE" kelimesindeki harfler kullanılarak anlamlı veya anlamsız 4 harfli kaç kelime oluşturulabilir?

6. Yandaki resimde gösterilen 6 araba 8 arabalık bir otoparka kaç farklı biçimde park edilebilir?

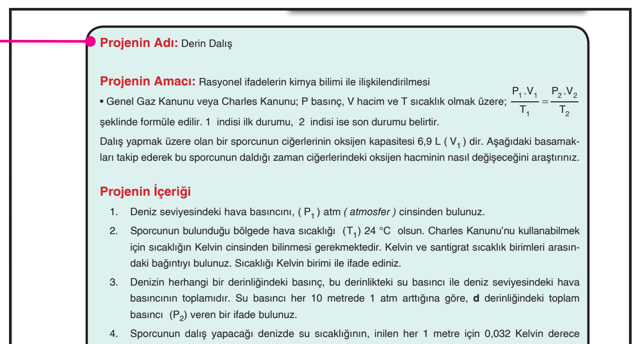
7. A = {1, 2, 3, 4, 5} kümesindeki elemanlar kullanılarak 4 basamaklı;
   a. Kaç doğal sayı yazılabilir?
   b. En az iki basamağı aynı olan kaç doğal sayı yazılabilir?

26 · 1.1 • SIRALAMA VE SEÇME

Öğrendiğiniz kazanım veya bölüm hakkındaki bilgilerinizi kullanarak cevaplayabileceğiniz sorular bu bölümde yer almaktadır. Her soruda tam olarak ne istendiğini anladıktan sonra soruya cevap vermelisiniz. Tam olarak ne istendiğini kavrayamadığınız sorular olursa ilgili konuyu kitabınızdan tekrar edebilir ya da öğretmeninizden yardım alabilirsiniz.

Her ünitede şekil ve grafikler kendi içinde numaralandırılmıştır.

Verilen üniteyle ilgili araştırmalarınızı ve çalışmalarınızı somutlaştırarak sunabileceğiniz projeleri içerir.



Projenin Adı: Derin Dalış

Projenin Amacı: Rasyonel ifadelerin kimya bilimi ile ilişkilendirilmesi

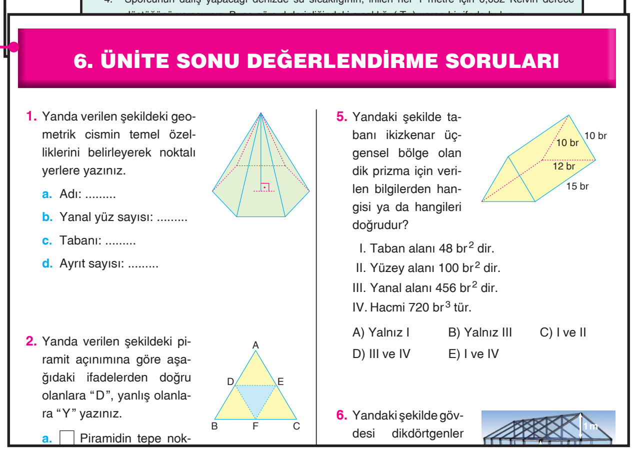
• Genel Gaz Kanunu veya Charles Kanunu; P basınç, V hacim ve T sıcaklık olmak üzere; $\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2}$ şeklinde formüle edilir. 1 indisi ilk durumu, 2 indisi ise son durumu belirtir.

Dalış yapmak üzere olan bir sporcunun ciğerlerinin oksijen kapasitesi 6,9 L (V_1) dir. Aşağıdaki basamakları takip ederek bu sporcunun daldığı zaman ciğerlerindeki oksijen hacminin nasıl değişeceğini araştırınız.

Projenin İçeriği

1. Deniz seviyesindeki hava basıncını, (P_1) atm (*atmosfer*) cinsinden bulunuz.
2. Sporcunun bulunduğu bölgede hava sıcaklığı (T_1) 24 °C olsun. Charles Kanunu'nu kullanabilmek için sıcaklığın Kelvin cinsinden bilinmesi gerekmektedir. Kelvin ve santigrat sıcaklık birimleri arasındaki bağıntıyı bulunuz. Sıcaklığı Kelvin birimi ile ifade ediniz.
3. Denizin herhangi bir derinliğindeki basınç, bu derinlikteki su basıncı ile deniz seviyesindeki hava basıncının toplamıdır. Su basıncı her 10 metrede 1 atm arttığına göre, **d** derinliğindeki toplam basıncı (P_2) veren bir ifade bulunuz.
4. Sporcunun dalış yapacağı denizde su sıcaklığının, inilen her 1 metre için 0,032 Kelvin derece

Her ünitenin sonunda, ünite boyunca öğrendiklerinizi ölçmeniz amacıyla hazırlanmış farklı tiplerde değerlendirme sorularına yer verilmiştir. Öğretmeninizin bu sorulara verdiğiniz cevaplarla ilgili değerlendirmelerini dikkate alınız.



6. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Yanda verilen şekildeki geometrik cismin temel özelliklerini belirleyerek noktalı yerlere yazınız.
   a. Adı: ....
   b. Yanal yüz sayısı: ....
   c. Tabanı: ....
   d. Ayrıt sayısı: ....

2. Yanda verilen şekildeki piramit açınımına göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanlara "D", yanlış olanlara "Y" yazınız.
   a. ☐ Piramidin tepe nok-

5. Yandaki şekilde tabanı ikizkenar üçgensel bölge olan dik prizma için verilen bilgilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?
   I. Taban alanı 48 br^2 dir.
   II. Yüzey alanı 100 br^2 dir.
   III. Yanal alanı 456 br^2 dir.
   IV. Hacmi 720 br^3 tür.

   A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II
   D) III ve IV E) I ve IV

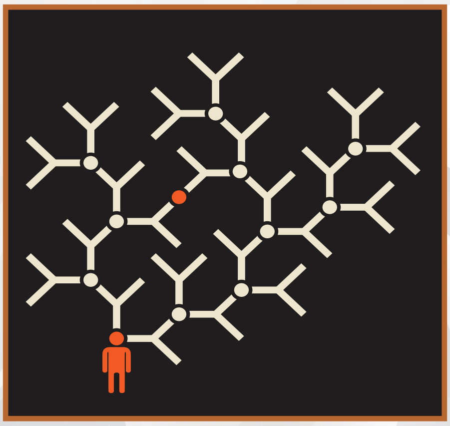
6. Yandaki şekilde gövdesi dikdörtgenler

1. ÜNİTE

SAYMA VE OLASILIK

Neler Öğreneceğiz?

- Sayma yöntemlerini, nesnelerin farklı dizilişlerinin sayısını ve n elemanlı bir kümenin r tane elemanının kaç farklı biçimde seçilebileceğini öğreneceğiz.
- Basit olayların olasılıklarını, tümleyen olayları, ayrık olan ve ayrık olmayan olaylarla ilgili olasılık hesapları yapmayı öğreneceğiz.



Neden Öğrenmeliyiz?

- Birden fazla yolla gerçekleşebilecek farklı olaylar bir araya geldiğinde nasıl bir durumla karşı karşıya kaldığımızı yorumlamak, seçim yapmak veya hem seçim hem de sıralama yapmamız gereken durumlarda kaç farklı seçeneğimizin olduğunu hesaplamak günlük hayatta sıkça karşımıza çıkar. Bu tür durumlarda kullanabileceğimiz sayma yöntemlerini, permütasyon (sıralama) ve kombinasyon (seçme) kavramlarını bu ünitede öğreneceğiz.
- Gerçekleşme ihtimalleri kesin olmayan; hava durumu vb. gibi durumlarda tahmin yürütüp karar vermek gerektiğinde olasılık hesapları ile hareket etmek yararımıza olacaktır. Bu tür olasılık hesaplamalarını bu ünitede öğreneceğiz.

ÖNCEKİ BİLGİLERİNİ TEST ET

1. Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini yazınız.

a. $\dfrac{6.5.4.3.2}{8.7.6.5}$ **b.** $\dfrac{10.9.8.7}{6.5.4.3}$ **c.** $\dfrac{11.10.9.8}{5.4.3.2}$ **d.** $\dfrac{24.23.22.21}{12.11.10.9}$

2. Aşağıdaki ifadeleri ortak çarpan parantezine alınız.

a. $3x + 3x^2$

b. $ax + ay + ax^2 - ay^2$

c. $n + 1 + (n + 1)^2$

d. $3ax^2 + ax + 3a^2x$

3. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan n doğal sayılarını bulunuz.

a. $n^2 = 49$ **b.** $(n + 1)^2 = 25$ **c.** $(2n + 2)^2 = 16$

4. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını en sade şekilde yazınız.

a. $x^2.(x^{-3}).(x^3)^5$

b. $(2x)^2.(-3x)^3.x^{-5}$

5. Aşağıdaki eşitliklerdeki n değerlerini bulunuz.

a. $(x^3)^{8-n}.\left(\dfrac{1}{x}\right)^n = x^{12}$

b. $x^{\frac{8-n}{3}} \cdot x^{\frac{n}{2}} = x^3$

6. Bir torbada özdeş 6 mavi, 4 sarı ve 2 beyaz top vardır. Buna göre aşağıdaki boşlukları uygun şekilde doldurunuz.

a. Torbadaki her bir topun çekilme olasılığı ....

b. Torbadan çekilme olasılığı en yüksek olan renk ....

c. Torbadan çekilme olasılığı en .... olan renk beyazdır.

d. Torbadan çekilen bir topun .... olma olasılığı ile mavi dışında bir renk olma olasılığı eşittir.

7. Hilesiz bir zar atıldığında,

a. Gelebilecek sayıların kümesini yazınız.

b. 3 gelme olasılığını bulunuz.

c. Tek sayı gelme olasılığını bulunuz.

d. 3 ten büyük gelme olasılığı ile 3 ten küçük gelme olasılığını karşılaştırınız.

e. En az 1 gelme olasılığı hangi tür olaydır?

f. En çok 6 gelme olasılığı hangi tür olaydır?

SIRALAMA VE SEÇME

BÖLÜM 1.1

Sayma Yöntemleri

Genel anlamıyla değerli eşyaları korumaya yarayan, çeşitli tarzlarda kilitler içeren sağlam kutulara kasa denir.

Bir iş yeri sahibi odasında bulunan şifreli kasası için dört haneli bir şifre oluşturuyor. Şifrenin unutulması durumunda kaç farklı deneme yapılması gerektiğini nasıl bulabiliriz?

Toplama Yöntem ile Sayma	A ve B sonlu ayrık iki küme olduğunda, $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre iki ayrık kümenin eleman sayısı **toplama yöntemiyle** bulunmuş olur. Benzer şekilde bir A olayı n_1 farklı yolla, B olayı n_2 farklı yolla gerçekleşiyorsa A veya B olayı $n_1 + n_2$ farklı yolla gerçekleşir.

1. Örnek

Mert'in 3 spor ayakkabısı, 2 günlük ayakkabısı ve 3 botu vardır. Mert bunlardan birini ihtiyaç sahiplerine ulaştırmak üzere bir yardımlaşma derneğine bağışlayacaktır. Bunun için kaç farklı seçim yapabileceğini bulalım.

Ayakkabı seçiminin kaç farklı biçimde yapılabileceğini bulmak için farklı türdeki ayakkabı sayılarını toplamalıyız.

$3 + 2 + 3 = 8$ olur.

Buna göre Mert, 8 farklı seçim yapabilir. Burada Mert'in yapabileceği farklı seçim sayısını "toplama yoluyla sayma" yöntemini kullanarak bulmuş olduk.

Sıra Sizde

Aynur 8 farklı şiir kitabı, 3 farklı roman ve 4 farklı hikâye kitabından birini seçip okumak istiyor. Aynur seçimini kaç farklı biçimde yapabilir?

TERİMLER

- Toplama yöntemi
- Çarpma yöntemi
- Faktöriyel
- Permütasyon
- Kombinasyon
- Pascal üçgeni
- Binom açılımı

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

- $n!$
- $P(n, r)$
- $C(n, r)$
- $\binom{n}{r}$
- $(x + y)^n$

Çarpma Yöntemi ile Sayma

A ve B olayları ayrık iki olay olsun. A olayı r_1 ve B olayı r_2 farklı yolla gerçekleşiyorsa bu olaylar bir arada $r_1 . r_2$ farklı yolla gerçekleşir. Burada iki ayrık olayın bir arada gerçekleşme sayısı **çarpma yöntemi** kullanılarak bulunmuş olur. Bu yöntemle yapılan sayma işlemi **saymanın temel ilkesi** olarak da adlandırılır.

2. Örnek

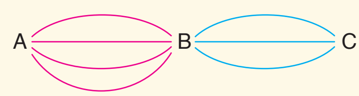
A kentinden B kentine 4 farklı yoldan, B kentinden C kentine 3 farklı yoldan gidilebilmektedir. A kentinden C kentine gitmek isteyen bir kişi B kentine uğramak zorundadır. Buna göre A kentinden C kentine kaç farklı biçimde gidilebileceğini bulalım.

A, B ve C kentlerinin arasındaki yollar "1. Şekil" de gösterilmiştir. Şekle göre A kentinden B kentine gitme olayı 4, B kentinden C kentine gitme olayı 3 farklı biçimde gerçekleşebilir. Bu iki olay bir arada,

$4 . 3 = 12$

farklı biçimde gerçekleşebilir. Burada olayların farklı yollardan gerçekleşme sayısını "çarpma yöntemi" ni kullanarak bulmuş olduk.

1. Şekil



Sıra Sizde

Bir mağazada 4 farklı çizme ve 5 farklı çanta modeli vardır. Bu mağazadan bir çizme ve bir çanta almak isteyen bir müşteri kaç farklı seçim yapabilir?

3. Örnek

Bir okulda yapılacak seçimlerin ilk turunda kendini açık şekilde ifade edip verdiği sözleri tutacağını anlatan öğrencilerden 25 i seçilmiştir. 2. turda ise 25 kişiden önce başkan, sonra başkan yardımcısı ve son olarak okul temsilcisi seçilecektir. Bu seçimin kaç farklı biçimde gerçekleşebileceğini bulalım.

Başkan seçimi 1. olay, başkan yardımcısı seçimi 2. olay ve okul temsilcisi seçimi 3. olay olsun. Her bir olayın farklı biçimlerde gerçekleşme sayıları "2. Şekil" deki gibidir.

2. Şekil

25	24	23
1. Olay	2. Olay	3. Olay

Bu üç olay bir arada,

$25 . 24 . 23 = 13\,800$ farklı biçimde gerçekleşir.

Sıra Sizde

16 kişilik bir gruptan önce bir grup temsilcisi, sonra grup sözcüsü seçilecektir. Bu seçim kaç farklı biçimde oluşturulabilir?

4. Örnek

Aslı, bilgisayarı için 4 rakamlı bir şifre oluşturuyor. Aslı'nın kaç farklı şifre oluşturabileceğini bulalım.

Aslı {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} kümesinin elemanlarını kullanmalıdır.

"3. Şekil"de gösterildiği gibi her bir rakam şifrenin her hanesi için kullanılabileceğinden şifrenin oluşturulması olayı,

$10 . 10 . 10 . 10 = 10^4 = 10\,000$ farklı biçimde gerçekleşebilir.

3. Şekil

10	10	10	10
1. Rakam	2. Rakam	3. Rakam	4. Rakam

Sıra Sizde

"KİTAP" kelimesindeki harfler kullanılarak anlamlı veya anlamsız üç harfli kaç farklı kelime oluşturulabilir?

> Her biri istenilen sayıda kullanılabilen n farklı nesneden r tanesi n^r farklı biçimde dizilebilir.

5. Örnek

A = {1, 2, 3, 4, 5} kümesindeki rakamlar kullanılarak üç basamaklı;

a. Kaç doğal sayı oluşturulabileceğini,

b. Rakamları farklı kaç doğal sayı oluşturulabileceğini,

c. Kaç çift doğal sayı oluşturulabileceğini,

d. Rakamları farklı kaç çift doğal sayı oluşturulabileceğini bulalım.

a. "4. Şekil"de her bir basamak için yazılabilecek rakam sayıları gösterilmiştir. Buna göre oluşturulabilecek üç basamaklı doğal sayıların sayısı,

$5 . 5 . 5 = 5^3 = 125$ olur.

4. Şekil

5	5	5
Yüzler B.	Onlar B.	Birler B.

b. Oluşturulacak üç basamaklı sayıların rakamlarının farklı olması istendiğinden her basamakta kullanılacak rakam sayısı "5. Şekil"de gösterildiği gibi bir eksiltilir. Buna göre oluşturulabilecek rakamları farklı üç basamaklı doğal sayıların sayısı,

$5 . 4 . 3 = 60$ olur.

5. Şekil

5	4	3
Yüzler B.	Onlar B.	Birler B.

c. Çift doğal sayı oluşturulması istendiğinden birler basamağına 2 veya 4 rakamı yazılabilir. Onlar ve yüzler basamaklarına rakamların tamamı yazılabilir. "6. Şekil"den de anlaşılacağı gibi oluşturulabilecek üç basamaklı çift doğal sayıların sayısı,

$5 . 5 . 2 = 50$ olur.

6. Şekil

5	5	2
Yüzler B.	Onlar B.	Birler B.

↓ {2, 4}

d. Birler basamağına iki farklı rakam yazılabilir. Birler basamağına yazılacak rakam belirlendikten sonra yüzler basamağına kalan dört rakamdan biri, onlar basamağına kalan üç rakamdan biri yazılabilir. “7. Şekil”den de görüldüğü gibi oluşturulabilecek rakamları farklı, çift, üç basamaklı doğal sayıların sayısı,

$4.3.2 = 24$ olur.

7. Şekil

4	3	2
Yüzler B.	Onlar B.	Birler B.

↓ {2, 4}

Sıra Sizde

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} kümesindeki rakamlar kullanılarak dört basamaklı;

a. Kaç doğal sayı oluşturulabileceğini,

b. Rakamları farklı kaç doğal sayı oluşturulabileceğini,

c. 5 ile bölünebilen rakamları farklı kaç doğal sayı oluşturulabileceğini bulunuz.

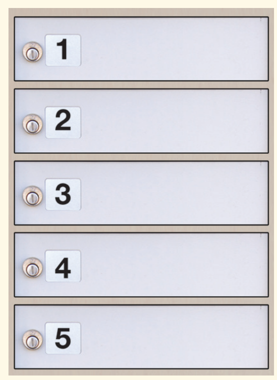
6. Örnek

4 farklı mektup ve “8. Şekil”deki gibi 5 farklı posta kutusu bulunmaktadır.

a. Mektupların kaç farklı biçimde posta kutularına atılabileceğini,

b. Her posta kutusunda en fazla bir mektup olması durumunda mektupların kaç farklı biçimde posta kutularına atılabileceğini bulalım.

8. Şekil



a. Her bir mektubun posta kutusuna atılması olayı “9. Şekil”deki gibi 5 farklı biçimde gerçekleşebilir. Bu durumda 4 mektubun posta kutularına atılması olayı,

$5.5.5.5 = 5^4 = 625$ farklı biçimde gerçekleşebilir.

9. Şekil

5	5	5	5
1. Mektup	2. Mektup	3. Mektup	4. Mektup

b. Her posta kutusunda en fazla bir mektup olması durumunda 1. mektubun atılması olayı 5, 2. mektubun atılması olayı 4, 3. mektubun atılması olayı 3 ve 4. mektubun atılması olayı 2 farklı biçimde gerçekleşebilir.

“10. Şekil”de her bir mektubun atılması olayının kaç farklı biçimde gerçekleşebileceği gösterilmiştir.

Buna göre mektuplar posta kutularına,

$5.4.3.2 = 120$ farklı biçimde atılabilir.

10. Şekil

5	4	3	2
1. Mektup	2. Mektup	3. Mektup	4. Mektup

Sıra Sizde

6 farklı çiçeğin 8 farklı vazoya kaç farklı şekilde konulabileceğini bulunuz.

7. Örnek

A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} kümesindeki elemanlar ile dört basamaklı, rakamları farklı ve 5 ile bölünebilen kaç doğal sayı yazılabileceğini bulalım.

Sayının 5 ile bölünmesi istendiğinden birler basamağına 0 veya 5 rakamları yazılabilir.

"11. Şekil"de birler basamağına 0 gelmesi durumunda diğer basamaklara kaç farklı rakam yazılabileceği gösterilmiştir.

"12. Şekil"de ise birler basamağına 5 gelmesi durumu incelenmiştir.

I ve II. durumlarda yazılabilecek dört basamaklı sayılar,

$5.4.3.1 + 4.4.3.1 = 60 + 48 = 108$ tanedir.

11. Şekil **(I. Durum)**

5	4	3	1
Birler B.	Yüzler B.	Onlar B.	Birler B.

↓ {0}

12. Şekil **(II. Durum)**

4	4	3	1
Birler B.	Yüzler B.	Onlar B.	Birler B.

↓ {5}

DİKKAT

Yazılacak sayının rakamları farklı ise 0 "sıfır" rakamının birler basamağında olması durumunda 0 rakamı için ayrı inceleme yapılır.

Sıra Sizde

A = {0, 2, 4, 6, 7, 8, 9} kümesindeki elemanlar kullanılarak üç basamaklı, rakamları farklı kaç çift doğal sayı yazılabilir?

Faktöriyel

Bir grup çocuk yanda verilen fotoğraftaki gibi yan yana durarak fotoğraf çektireceklerdir. Çekilebilecek farklı fotoğraf sayısını çarpma prensibini kullanarak bulmayı biliyoruz. Sizce fotoğrafı çekilecek çocuk sayısının çok fazla olması durumunda gösterim kolaylığı sağlayacak başka bir yöntem olabilir mi?

8. Örnek

A = {1}, B = {1, 2}, C = {1, 2, 3} ve D = {1, 2, 3, 4} kümeleri veriliyor. A kümesinin elemanları ile bir basamaklı, B kümesinin elemanları ile iki basamaklı, C kümesinin elemanları ile üç basamaklı ve D kümesinin elemanları ile dört basamaklı, rakamları farklı sayılar oluşturulacaktır. Bu şartlar altında her bir küme ile kaç farklı sayı oluşturulabileceğini bulalım.

TARİH KÖŞESİ

İlk çağlarda insanlar mağara duvarlarına, avladıkları ya da sürülerinde bulunan hayvan sayılarını belirtmek için çizikler çizmişler, ağaç dallarına çentikler atmışlardır. Saymak için bazen ipe düğüm atmış, çakıl taşlarını kullanmış olan insanlar daha sonra kil tabletler üzerine çizdiği işaretlerle rakam ve sayıları ilk defa yazılı olarak ifade etmiş oluyorlardı. Tarih bakımından biraz daha ilerlediğimizde, bu alandaki gelişimin en büyük sahiplerinin Eski Mısırlılar ve Mezopotamyalılar olduğu görülmektedir. Sayıların ve dolayısıyla matematiğin gelişmesiyle birlikte İslam dünyasında sayılar teorisi üzerinde yapılan araştırmalar 9. yüzyılda "Dost Sayılar" teorisini ele alan Sabit İbn Kurra tarafından başlatıldı. Öklid'in, Elementler'inin IX. bölümünde "mükemmel sayılar teorisi"ni verdiği bir tarzla hareket eden Sabit İbn Kurra dost sayılar için de benzer bir teori kurmuştur. Sabit İbn Kurra'nın adıyla anılmaya başlayan Kurra teoremini cebirsel metotla ispat etme çalışmaları sırasında sayma yöntemleri ve sayılarla ilgili araştırmalar geliştirilmiştir. Özetleyecek olursak, bir tam sayının bölenlerinin sayısı ve bu sayıların toplamı ile ilgili olan Kurra teoreminden sonra çarpanlara ayırma ve tam sayıların bölenlerini asal çarpanların sayısı cinsinden hesaplama çalışmaları geliştirilmiştir.

Kaynak : // www.islamansiklopedisi.info/dia/ayrmetin.php?idno=280134

Aşağıdaki tabloda her bir kümenin elemanlarının tümü kullanılarak oluşturulacak rakamları farklı olan sayıların basamaklarına gelebilecek rakamların sayıları gösterilmiştir. Bu sayıların çarpımı (çarpma yöntemine göre) oluşturulabilecek farklı sayıların sayısını verir. En son satırda ise n tane elemanın olması durumunda bu elemanların farklı sıralanışlarının sayısı bulunmuştur.

Küme	Basamaklara Gelebilecek Rakam Sayısı	Oluşturulabilecek Sayıların Sayısı
A = {1}	1	1
B = {1, 2}	2 1	2.1 = 2
C = {1, 2 , 3}	3 2 1	3.2.1 = 6
D = {1, 2, 3, 4}	4 3 2 1	4.3.2.1 = 24
⋮		⋮
{1, 2, 3, ... n}	n n – 1 n – 2 ... 1	n.(n – 1).(n – 2). 3.2.1

n! (n Faktöriyel)	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere 1 den n ye kadar olan sayma sayılarının çarpımına **n faktöriyel** denir ve **n!** şeklinde gösterilir. n! = 1.2.3. ... . (n – 1).n dir. 0! = 1 olarak tanımlanır.

9. Örnek

"KALEM" kelimesindeki harflerin en fazla bir kez kullanılması koşuluyla, anlamlı ya da anlamsız 5 harfli kaç kelime oluşturulabileceğini bulalım.

"13. Şekil" de gösterildiği gibi 1. harf için 5, 2. harf için 4, 3. harf için 3, 4. harf için 2 ve 1. harf için 1 harf kullanılabilir. Buna göre "KALEM" kelimesindeki harfler ile oluşturulabilecek 5 harfli kelime sayısı,

5.4.3.2.1 = 120 olur.

Ayrıca 5.4.3.2.1 işlemi 5! olarak da ifade edilebilir.

13. Şekil

5	4	3	2	1
1. Harf	2. Harf	3. Harf	4. Harf	5. Harf

10. Örnek

Aşağıdaki işlemleri inceleyelim.

a. 2! = 1.2 = 2

b. 3! = 1.2.3 = 6

c. 6! = 1.2.3.4.5.6 = 720

d. 7! = 6!.7 = 720.7 = 5040

11. Örnek

$\frac{8!-6!}{5!}$ **işleminin sonucunu bulalım.**

$$\frac{8!-6!}{5!}=\frac{8.7.6!-6!}{5!}=\frac{6!(56-1)}{5!}=\frac{6.\cancel{5!}.55}{\cancel{5!}}=330$$ bulunur.

DİKKAT

n! = 1.2.3. ... .(n − 1).n olduğuna göre n! = (n − 1)!.n eşitliği yazılabilir. Benzer şekilde n! = (n − 2)!.(n − 1).n dir.

Sıra Sizde

$\frac{10!-8!}{7!}$ işleminin sonucunu bulunuz.

12. Örnek

$\frac{(n+2)!-(n+1)!}{n!+(n+1)!}$ **ifadesinin eşitini bulalım.**

$$\frac{(n+2)!-(n+1)!}{n!+(n+1)!}=\frac{(n+2)(n+1)n!-(n+1)n!}{n!+(n+1)n!}$$

$$=\frac{(n+1)\cancel{n!}[n+2-1]}{\cancel{n!}(1+n+1)}=\frac{(n+1)^2}{n+2}$$ bulunur.

Sıra Sizde

$\frac{(n-2)!+(n-1)!}{n!-(n-1)!}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Permütasyon (Sıralama)

Vücut sağlığını korumak için yapılan koşu, yarış amaçlı da yapılmaktadır. İnsanoğlunun kültürel faaliyetlerinin oluşmasıyla birlikte ortaya çıktığı düşünülen yarış koşuları ilk olarak İrlanda'da M.Ö. 1829 yılında düzenlenen oyunlarda görülmüştür. Buna karşın bu yarışlar ilk defa M.Ö. 776 yılında Olimpiyat Oyunları'nda kayıtlara geçmiştir.

Sizce yapılacak bir maratonda engelli atletlerin ilk üç sırayı kaç farklı şekilde alıp dereceye gireceklerini nasıl hesaplayabiliriz?

Permütasyon (Sıralama)	$n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ ve $r \leq n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin r elemanlı her sıralı r lisine, bu kümenin **r li bir permütasyonu** denir. Buna göre n elemanlı bir kümenin r li tüm permütasyonlarının sayısı $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ ile bulunur.

DİKKAT

$P(n, n) = n!$ olduğuna dikkat ediniz.

13. Örnek

A = {1, 2, 3, 4, 5, a} kümesinin 3 lü permütasyonlarının sayısını bulalım.

A kümesinin 3 elemanının kaç farklı biçimde seçilip sıralanabileceğini bulmalıyız. $s(A) = 6$ olduğundan $n = 6$, 3 eleman sıralanacağından $r = 3$ tür.

$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ eşitliğinde $n = 6$ ve $r = 3$ değerleri yazılırsa,

$$P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

A = {a, b, c, 1, 2, 3} kümesinin 4 lü permütasyonlarının sayısını bulunuz.

14. Örnek

A = {1, 2, 3, 4, a, b} kümesinin 4 lü permütasyonlarının kaç tanesinde 2 elemanının yer alacağını bulalım.

6 elemanlı A kümesinin 4 lü permütasyonlarının sayısı,

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360 \text{ tır.}$$

A kümesinde 2 elemanının bulunmadığı 4 lü permütasyonların sayısı, {1, 3, 4, a, b} kümesinin 4 lü permütasyonlarının sayısı kadardır.

$$P(5, 4) = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 120 \text{ dir.}$$

A kümesinin 4 lü permütasyonlarının sayısından 2 nin yer almadığı 4 lü permütasyonlarının sayısını çıkaralım. Buna göre 2 nin yer aldığı 4 lü permütasyonların sayısı,

$360 - 120 = 240$ tanedir.

Sıra Sizde

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ kümesinin 3 lü permütasyonlarının kaç tanesinde 8 elemanının yer alacağını bulunuz.

15. Örnek

Yaşları farklı 3 kardeş ve bunların arkadaşları olan 5 kişi yandaki gibi yan yana fotoğraf çektirecekler-dir. Buna göre;

a. Hiçbir koşul olmaksızın,

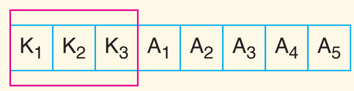
b. Kardeşlerin yan yana olması koşuluyla,

c. Kardeşlerin yan yana gelmemesi koşuluyla kaç değişik biçimde fotoğraf çektirebileceklerini bulalım.

a. Herhangi bir koşul olmadığında $3+5=8$ kişi $P(8,8)=8!$ farklı biçimde sıralanabilir. O hâlde $8!$ değişik biçimde fotoğraf çektirebilirler.

b. Kardeşlerin yan yana gelmesi durumunda "14. Şekil"deki gibi 3 kardeşi 1 kişi olarak düşünebiliriz.

14. Şekil



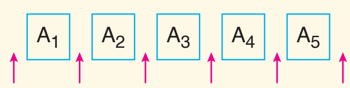
Bu durumda $1 + 5 = 6$ kişi $P(6, 6) = 6!$ farklı biçimde sıralanabilir. 3 kardeş de kendi arasında $3!$ farklı şekilde sıralanabileceğinden farklı fotoğrafların sayısı,

$6!.3!$ olur.

c. Kardeşlerin yan yana gelmemesi durumunda önce 5 arkadaşın kaç farklı biçimde sıralanabileceğini bulalım.

$P(5,5) = 5!$ olur.

15. Şekil



5 kişinin yanlarında bulunan "15. Şekil"de oklarla gösterilen 6 farklı yere 3 kardeş yerleştirilirse kardeşler yan yana gelmemiş olur.

6 farklı yerden 3 yere yerleştirme işlemi,

$$P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 120$$ farklı biçimde gerçekleşebilir.

O hâlde kardeşlerin yan yana gelmemesi durumunda çekilebilecek farklı fotoğrafların sayısı,

$120.5!$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

4 farklı matematik ve 5 farklı Türkçe kitabı bir rafa sıralanacaktır.

a. Kitaplar kaç farklı biçimde sıralanabilir?

b. Türkçe kitapları yan yana olmak üzere kaç farklı biçimde sıralanabilir?

c. Matematik kitapları yan yana gelmemek üzere kaç farklı biçimde sıralanabilir?

Tekrarlı Permütasyon	n tane nesneden bazılarının aynı türden (özdeş) olduğu n tane elemanın farklı dizilişlerine tekrarlı permütasyon denir. $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ tanesi aynı olan toplam n nesnenin farklı dizilişlerinin sayısı, $\dfrac{n!}{n_1!.n_2!\cdots n_k!}$ formülü ile bulunur.

16. Örnek

BABA kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız dört harfli,

a. Kaç farklı kelime yazılabileceğini,

b. A ile başlayan kaç farklı kelime yazılabileceğini bulalım.

a. 4 harfli BABA kelimesinde tekrar eden (özdeş) 2 tane B ve 2 tane A harfi bulunmaktadır. Tekrarlı permütasyon formülünü kullanarak yazılabilecek farklı kelime sayısı

$\dfrac{4!}{2!.2!} = \dfrac{24}{2.2} = 6$ bulunur.

b. ABAB gibi A ile başlayan kelime sayısı bulunurken yeri sabit olmayan BAB harflerinin yerleri değiştirilebilecektir. Bu durumda 3 harfli BAB kelimesinin harfleri yer değiştirilerek yazılabilecek farklı kelime sayısı

$\dfrac{3!}{2!} = \dfrac{6}{2} = 3$ bulunur.

Sıra Sizde

4441886 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek 7 basamaklı,

a. Kaç farklı sayı yazılabileceğini,

b. Kaç farklı tek sayı yazılabileceğini bulunuz.

17. Örnek

Ali Kerem'in yandaki fotoğrafta görülen 8 kitabından 2 si fizik, 3 ü matematik ve 3 ü Türkçe kitabıdır. Bu kitapların yerlerini değiştiren Ali Kerem'in ders türleri bakımından kaç farklı diziliş elde edebileceğini bulalım.

Kitapların ait olduğu ders türlerinin baş harflerini dikkate alırsak durumu, FFMMMTTT kelimesinin harflerinin yerlerinin değiştirilmesiyle elde edilecek farklı kelime sayısı problemi gibi çözebiliriz. O hâlde kitapların yerleri değiştirilerek ders türleri bakımından,

$$\frac{8!}{2!.3!.3!} = \frac{8.7.\cancel{6}.5.4.\cancel{3!}}{2!.\cancel{3!}.\cancel{3!}} = 560$$ farklı diziliş elde edilir.

Sıra Sizde

Aynı iş yerinde çalışan 9 kişilik arkadaş grubu yan yana dizilerek fotoğraf çektirmek istemektedir. Fotoğraf çekimi esnasında gruptakilerden 4 ü siyah, 3 ü beyaz, 2 si mavi gömlek giydiğine göre renk bakımından kaç farklı fotoğraf elde edilir?

18. Örnek

Teknolojinin gelişmesiyle birlikte ortaya çıkan yeni suçlardan biri de dijital suçlardır. Bu suçlara maruz kalmamak için kullandığımız teknolojik aletlerin büyük çoğunluğunu bir şifre ile koruma altına alırız. Bir bilgisayarın açılış şifresi için

- **6 rakam ve 2 harften oluşmaktadır.**
- **Harflerden ikisi de C dir.**
- **Rakamlardan ikisi 0, üçü 1 ve biri de 9 dur.**
- **Şifre 0 ile başlamamaktadır.**

bilgilerini bilen birinin kaç denemede bilgisayarı açabileceğini bulalım.

Şifrenin içerdiği karakterleri CC001119 şeklinde yazalım. Şifredeki karakterlerin başa 0 rakamı gelmeden ve tekrar eden karakterler dikkate alınmadan diziliş sayısı "16. Şekil"deki gibi 6 . 7! bulunur.

16. Şekil

6	7	6	5	4	3	2	1
1. Karakter	**2. Karakter**	**3. Karakter**	**4. Karakter**	**5. Karakter**	**6. Karakter**	**7. Karakter**	**8. Karakter**

Tekrar eden karakterleri de hesaba katarak bilgisayarın en az

$$\frac{6.7!}{2!.2!.3!} = \frac{6.7.6.5.4.\cancel{3!}}{2!.2!.\cancel{3!}} = 1260$$ denemede açılabileceği bulunur.

Sıra Sizde

Türkiye Cumhuriyeti Kimlik Numarası, Nüfus ve Vatandaşlık İşleri Genel Müdürlüğü tarafından Türkiye Cumhuriyeti vatandaşlarına verilmiş 11 rakamdan oluşan kişiye özgü bir sayıdır. Bir kimlik numarası için,

- Üç tane 5, dört tane 2, iki tane 0, birer tane 8 ve 9 rakamları bulunmaktadır.
- Tek rakamla başlayıp tek rakamla bitmektedir.

bilgileri verildiğine göre bu kimlik numarasını bulabilmek için kaç farklı tahmin yapılmalıdır?

Kombinasyon (Seçme)

Filiz, yaz tatilinde üç günlüğüne teyzesini ziyaret etmek istemektedir. Yaz günlerinde tişört giymekten hoşlanan Filiz yanda gösterilen 5 tişörtünden üçünü seçip yanında götürecektir.

Sizce Filiz bu seçimi kaç farklı şekilde gerçekleştirebilir?

Kombinasyon (Seçme)

$n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, ve $r \leq n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin r tane elemanı,

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!.r!}$$

farklı biçimde seçilebilir.

$C(n, r)$, n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısıdır. Bu alt kümelerin her birine **n nin r li kombinasyonu** denir.

19. Örnek

A = {a, b, c} kümesinin 2 li permütasyonlarını ve kombinasyonlarını yazalım.

2 li Permütasyonları (Sıralı İkilileri)	2 li Kombinasyonları (2 Elemanlı Alt Kümeleri)
(a, b) – (b, a)	{a, b}
(a, c) – (c, a)	{a, c}
(b, c) – (c, b)	{b, c}

DİKKAT

Permütasyonda sıralama önemli iken, kombinasyonda sıralama önemli değildir. n elemanlı bir kümenin r li permütasyonları bulunduğunda, r tane elemanın farklı seçim sayısı ile birlikte sıralanış sayısı da bulunmuş olur. Bu yüzden,

$P(n, r) = C(n, r).r!$ veya

$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}$ dir.

20. Örnek

Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulalım.

a. $C(10, 3)$

b. $\dfrac{C(15,3)}{C(15,12)}$

a. $C(10,3) = \dfrac{10!}{(10-3)!.3!} = \dfrac{10.9.8.\cancel{7!}}{\cancel{7!}.3.2.1} = 120$ bulunur.

b. $\dfrac{C(15,3)}{C(15,12)} = \dfrac{\dfrac{15!}{(15-3)!.3!}}{\dfrac{15!}{(15-12)!.12!}} = \dfrac{\dfrac{15!}{12!.3!}}{\dfrac{15!}{3!.12!}} = 1$ bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a. $C(12, 4)$

b. $\dfrac{C(9,2)}{C(7,3)}$

21. Örnek

$3.\begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-3 \end{pmatrix}$ eşitliğindeki n nin değerini bulalım.

$$3.\begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-3 \end{pmatrix} \Rightarrow 3.\frac{(n-1)!}{(n-1-2)!.2!} = \frac{n!}{(n-(n-3))!.(n-3)!}$$

$$\Rightarrow \frac{3\,\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-3)!}\ \cancel{2!}} = \frac{n\,\cancel{(n-1)!}}{\underset{3}{\cancel{3!}}.\cancel{(n-3)!}}$$

$\Rightarrow n = 9$ bulunur.

Sıra Sizde

$2.C(n, 2) = C(n, 1)$ eşitliğindeki n nin değerini bulunuz.

Temel Özellikler	• $C(n, r) = C(n, n-r)$ • $C(n, 0) + C(n, 1) + ... + C(n, n) = 2^n$

22. Örnek

$C(n, r) = C(n, n - r)$ ve $C(n, 0) + C(n, 1) + ... + C(n, n) = 2^n$ eşitliklerinin doğru olduğunu gösterelim.

- $C(n, n-r) = \dfrac{n!}{(n-(n-r))!.(n-r)!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = C(n,r)$ dur.
- $C(n, 0) + C(n, 1) + ... + C(n, n)$ toplamı n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısını göstermektedir.

n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısını çarpma prensibi kullanarak hesaplayalım.

$A = \{x_1, x_2, ... , x_n\}$ kümesinin bir alt kümesini oluşturmak için her bir

x_i $(i = 1, 2, ... , n)$ elemanının alt kümede yer alıp almayacağına karar verilmesi gerekir. Bu durumda tüm alt kümeleri oluşturmak için n tane basamak söz konusudur.

1. Basamak $\rightarrow x_1$ in alt kümede bulunması veya bulunmaması

2. Basamak $\rightarrow x_2$ nin alt kümede bulunması veya bulunmaması

3. Basamak $\rightarrow x_3$ ün alt kümede bulunması veya bulunmaması

⋮

n. Basamak $\rightarrow x_n$ in alt kümede bulunması veya bulunmaması

Her basamak 2 farklı biçimde gerçekleşmektedir. Bu durumda n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin oluşturulması çarpma prensibinden, 2^n farklı biçimde gerçekleşebilir.

O hâlde n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısı 2^n dir.

$C(n, 0) + C(n, 1) + ... + C(n, n) = 2^n$ olur.

DİKKAT

$\binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{n-1} = n$ $\binom{n}{1} = n$

olduğuna dikkat ediniz.

23. Örnek

$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ kümesinin;

a. En az dört elemanlı alt kümelerinin sayısını,

b. En çok iki elemanlı alt kümelerinin sayısını bulalım.

a. $s(A) = 5$ tir. Bu kümenin en az dört elemanlı alt kümelerinin sayısı $\binom{5}{4} + \binom{5}{5}$ olur. Buna göre,

$$\binom{5}{4} + \binom{5}{5} = \frac{5!}{(5-4)!.4!} + \frac{5!}{(5-5)!.5!} = 5 + 1 = 6 \text{ bulunur.}$$

b. A kümesinin en çok 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}$ işlemi ile bulunur.

$$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-0)!.0!}+\frac{5!}{(5-1)!.1!}+\frac{5!}{(5-2)!.2!}$$

$$= 1+5+\frac{5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.2!}$$

$$= 16 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} kümesinin;

a. En çok üç elemanlı alt kümelerinin sayısını,

b. En az beş elemanlı alt kümelerinin sayısını bulunuz.

24. Örnek

A = {a, b, c, d, e, f, g} kümesi veriliyor. Bu kümenin üç elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde;

a. c elemanının bulunduğunu,

b. d elemanının bulunmadığını,

c. a ve b elemanlarının bulunduğunu,

d. d veya c elemanlarının bulunduğunu hesaplayalım.

a. Oluşturulacak üç elemanlı alt kümelerde elemanlardan biri c olacaktır. Diğer iki eleman {a, b, d, e, f, g} kümesinden seçildiğinden içinde c elemanı bulunan üç elemanlı alt küme sayısı,

$$\binom{6}{2}=\frac{6!}{(6-2)!2!}=\frac{6!}{4!.2!}=15 \text{ bulunur.}$$

b. A kümesinden d elemanı çıkarılıp {a, b, c, e, f, g} kümesinin üç elemanlı alt kümeleri oluşturulduğunda d elemanının yer almadığı alt kümelerin sayısı,

$$\binom{6}{3}=\frac{6!}{(6-3)!3!}=\frac{6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.3!}=20 \text{ bulunur.}$$

c. Oluşturulacak üç elemanlı alt kümelerin elemanlarından ikisi a ve b olacağından kalan bir eleman {c, d, e, f, g} kümesinden seçilmelidir.

Bu seçim, $\binom{5}{1}=5$ farklı biçimde yapılabilir.

d. 1. Yol

A kümesinin tüm üç elemanlı alt kümelerinin sayısından d ve e nin bulunmadığı üç elemanlı alt kümelerin sayısını çıkarırsak d veya e elemanlarının bulunduğu üç elemanlı alt küme sayısı,

$$\binom{7}{3}-\binom{5}{3}=\frac{7!}{(7-3)!.3!}-\frac{5!}{(5-3)!.3!}=\frac{7.6.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,3!}-\frac{5.4.\cancel{3!}}{2!\,\cancel{3!}}$$

$$= 35 - 10$$

$$= 25 \text{ bulunur.}$$

2. Yol

d nin bulunduğu alt kümelerin sayısı ile e nin bulunduğu alt kümelerin sayısının toplamından d ve e nin birlikte bulundukları alt küme sayısını çıkarırsak d veya e elemanlarının bulunduğu üç elemanlı alt küme sayısı,

$$\binom{6}{2}+\binom{6}{2}-\binom{5}{1}=15+15-5=25 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} kümesinin dört elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde;

a. 3 elemanının bulunduğunu,

b. 5 elemanının bulunmadığını,

c. 1 ve 2 elemanlarının bulunduğunu,

d. 4 veya 6 elemanlarının bulunmadığını hesaplayınız.

25. Örnek

6 erkek, 4 kız öğrenci arasından 3 kişi seçilerek bir ekip oluşturulacaktır. Buna göre;

a. **Herhangi bir koşul olmadan bu ekibin kaç farklı biçimde oluşturulabileceğini,**

b. **İkisi erkek olmak üzere bu ekibin kaç farklı biçimde oluşturulabileceğini,**

c. **En az ikisi kız olmak üzere bu ekibin kaç farklı biçimde oluşturulabileceğini bulalım.**

a. 6 + 4 = 10 kişi arasından 3 kişi seçilecektir. Buna göre ekip,

$$\binom{10}{3}=\frac{10.9.8.\cancel{7!}}{\cancel{7!}\,3!}=120 \text{ farklı biçimde oluşturulabilir.}$$

b. Ekipte 2 erkek öğrenci olacağına göre kalan 1 kişi kız olacaktır. 6 erkek arasından 2 erkek $\binom{6}{2}$; 4 kız arasından 1 kız $\binom{4}{1}$ farklı biçimde seçilebilir. Bu durumda 3 kişilik ekip,

$$\binom{6}{2}.\binom{4}{1} = \frac{6.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}.2!}.4$$
$$= 15.4$$
$$= 60 \text{ farklı biçimde oluşturulabilir.}$$

c. Oluşturulacak ekip 2 kız, 1 erkek veya sadece 3 kız öğrenciden oluşabilir. Bu koşullarda 3 kişilik ekip,

$$\binom{4}{2}\binom{6}{1}+\binom{4}{3}\binom{6}{0} = \frac{4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}.2!}.6+4.1$$
$$= 36 + 4$$
$$= 40 \text{ farklı biçimde oluşturulabilir.}$$

Sıra Sizde

5 erkek, 3 kız öğrenci arasından seçilecek 4 kişi ile bir ekip oluşturulacaktır. Buna göre;

a. Herhangi bir koşul olmadan kaç farklı ekip oluşturulabilir?

b. İkisi kız olmak üzere kaç farklı ekip oluşturulabilir?

c. En az ikisi erkek olmak üzere kaç farklı ekip oluşturulabilir?

26. Örnek

Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan 8 noktanın herhangi ikisinden geçen kaç farklı doğru çizilebileceğini bulalım.

Düzlemde farklı iki nokta bir doğru belirtir. Buna göre herhangi üçü doğrusal olmayan 8 nokta,

$$\binom{8}{2} = \frac{8.7.\cancel{6!}}{\cancel{6!}.2!} = 28 \text{ doğru belirtir.}$$

O hâlde herhangi üçü doğrusal olmayan 8 noktanın herhangi ikisinden geçen 28 doğru çizilebilir.

Sıra Sizde

Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan 10 noktanın herhangi ikisinden geçen kaç farklı doğru çizilebileceğini bulunuz.

DİKKAT

Düzlemde farklı iki nokta bir doğru belirtir. Bu yüzden doğrusal olmayan n tane noktanın herhangi ikisinden geçen doğru sayısı $\binom{n}{2}$ kadardır.

27. Örnek

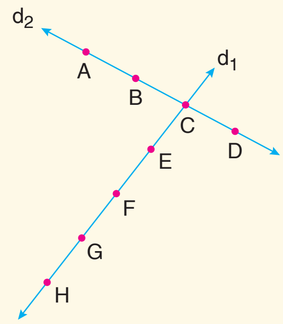
"17. Şekil" de C noktasında kesişen d_1 ve d_2 doğrularının üzerinde 8 nokta verilmiştir.

Buna göre;

a. Bu noktaların en az ikisinden geçen kaç farklı doğru çizilebileceğini,

b. Köşeleri bu noktalar olan kaç farklı üçgen oluşturulabileceğini bulalım.

17. Şekil



a. Toplam 8 noktanın en az ikisinden geçen doğru sayısı $\binom{8}{2}$ kadar olur.

Ancak d_1 doğrusunun üzerindeki 5 noktanın ikili kombinasyonları d_1 doğrusundan farklı bir doğru belirtmez.

Aynı şekilde d_2 doğrusunun üzerindeki 4 noktanın ikili kombinasyonları d_2 doğrusundan farklı bir doğru belirtmez.

O hâlde verilen 8 noktanın en az ikisinden geçen doğru sayısı,

$$\binom{8}{2}-\binom{5}{2}-\binom{4}{2}+\underbrace{1}_{d_1 \text{ doğrusu}}+\underbrace{1}_{d_2 \text{ doğrusu}}=\frac{8.7.\cancel{6!}}{\cancel{6!}.2!}-\frac{5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.2!}-\frac{4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}\,2!}+2$$

$$= 28 - 10 - 6 + 2$$

$$= 14 \text{ bulunur.}$$

b. "17. Şekil" de verilen 8 noktanın 5 i d_1 doğrusunun üzerinde, 4 ü d_2 doğrusunun üzerindedir. d_1 ve d_2 doğrularının üzerindeki noktalar doğrusal olduğundan üçlü kombinasyonları üçgen belirtmez.

O hâlde köşeleri verilen bu 8 nokta olan üçgen sayısı,

$$\binom{8}{3}-\binom{5}{3}-\binom{4}{3}=\frac{8.7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,3!}-\frac{5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,2!}-4$$

$$= 56 - 10 - 4$$

$$= 42 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

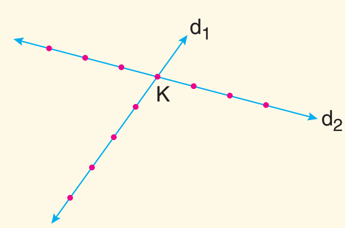
"18. Şekil" de $d_1 \cap d_2 = \{K\}$ dir. d_1 doğrusunun üzerinde 5, d_2 doğrusunun üzerinde 7 nokta belirlenmiştir.

Buna göre;

a. Bu noktalardan geçen kaç farklı doğru çizilebilir?

b. Köşeleri bu noktalar olan kaç farklı üçgen çizilebilir?

18. Şekil

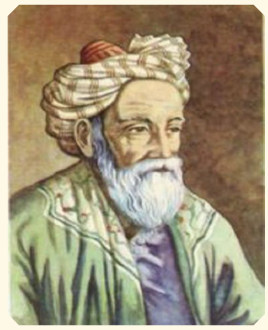


Pascal (*Paskal*) Üçgeni ve Binom Açılımı

"19. Şekil" de verilen üçgen, Pascal üçgeni olarak bilinir. 1623 - 1662 yılları arasında yaşayan Fransız matematikçi Blaise (*Blez*) Pascal'ın adıyla anılan ve binom açılımındaki katsayıları veren bu üçgen ile ilgili ilk çalışmaları Hintliler yapmıştır. Sonrasında 1048 - 1131 yılları arasında yaşayan şair, filozof ve matematikçi olan Ömer Hayyam'ın da bu konuda çalışmaları olmuştur. Bu üçgenle ilgili Hayyam'ın bir kitabının olduğu, fakat kitabın günümüze ulaşmadığı, Ömer Hayyam'ın bu kitaptan başka kitaplarında bahsettiği bilinmektedir. Ömer Hayyam'ın cebir üzerine yazdığı kitap Doğu'da matematik dünyasında uzun yıllar kullanılmıştır. Batılı matematikçilerin bu kitapla tanışması 1800'lü yıllarda yapılan çevirisi ile olmuştur. Öncesinde ise 1742 yılında Gerard Meerman (*Jeğa Miman*) adlı bilim adamı bir eserinin önsözünde islam bilginlerinin matematiğe katkılarından ve Ömer Hayyam'ın Hollanda Kütüphanesi'nde bulunan el yazması eserinden bahsetmiştir.

19. Şekil

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
....



Ömer Hayyam
(1048 – 1131)
(Temsilî resimdir.)

Kaynak: https://islamansiklopedisi.org.tr/omer-hayyam http://www.matder.org.tr/index.php?option=com_content &view=article&id=32:omer-hayyam&catid=7:unlu-matematikciler&Itemid=171 kaynaklarından derlenmiştir.

Pascal Üçgeni	"20. Şekil" de verilen üçgen Pascal üçgenidir. Pascal üçgeninde; her satırın birinci sayısı olan 1 den sonra gelen sayı, bir üst satırın birinci ve ikinci sayılarının toplamıdır. Her satırın üçüncü sayısı üst satırın ikinci ve üçüncü sayılarının toplamıdır. Bu şekilde oluşturulan Pascal üçgeninde her satırın son sayısı ise yine 1 dir.

20. Şekil

1 → 0. satır
1 1 → 1. satır
1 2 1 → 2. satır
1 3 3 1 → 3. satır
1 4 6 4 1 → 4. satır
1 5 10 10 5 1
....

Pascal Üçgeni'nde her bir satırdaki sayılar, $(x \pm y)^n$ ifadesinin açılımında bulunan terimlerin katsayılarını verir. Şimdi Pascal Üçgeni'nin satırlarını kombinasyon kullanarak yazalım.

1 → $(x \pm y)^0$ ← $\binom{0}{0}$

1 1 → $(x \pm y)^1$ ← $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

1 2 1 → $(x \pm y)^2$ ← $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

1 3 3 1 → $(x \pm y)^3$ ← $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

1 4 6 4 1 → $(x \pm y)^4$ ← $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

1 5 10 10 5 1 → $(x \pm y)^5$ ← $\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

....

Kombinasyon kullanarak oluşturduğumuz Pascal Üçgeni'nde,

$\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=\binom{2}{1}$, $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=\binom{3}{2}$, $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=\binom{5}{3}$ ... olduğunu kolaylıkla görebiliriz.

O hâlde bu eşitlikleri genellersek, $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ sonucuna ulaşabiliriz.

Pascal Özdeşliği	$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ eşitliğine **Pascal özdeşliği** denir.

28. Örnek

Pascal özdeşliğinin doğruluğunu kombinasyon özelliklerini kullanarak gösterelim.

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!(k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!}$$

$$= (n-1)!\left[\underset{(k)}{\frac{1}{(n-k)!(k-1)!}}+\underset{(n-k)}{\frac{1}{(n-k-1)!k!}}\right]$$

$$= (n-1)!\left[\frac{k}{(n-k)!k!}+\frac{n-k}{(n-k)!\,k!}\right]$$

$$= (n-1)!.\frac{n}{(n-k)!k!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$= \binom{n}{k} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$\binom{10}{8}+\binom{10}{9}=\binom{11}{9}$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Binom Formülü

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(x+y)^n$ ifadesinin x in ve y nin kuvvetleri cinsinden açılımına **binom açılımı** denir.

$$(x+y)^1 = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

Binom formülü, binom açılımındaki terimlerin katsayılarının kombinasyon yardımı ile bulunabileceğini ifade eder.

Binom formülüne göre;

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n \text{ dir.}$$

29. Örnek

Binom formülünden yararlanarak aşağıdaki ifadelerin açılımlarını bulalım.

a. $(a+b)^4$ **b.** $(x-y)^5$ **c.** $(2x+3y)^3$ **d.** $\left(\frac{1}{x}-x\right)^6$

a. $(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ tür.

b. $(x-y)^5 = [x+(-y)]^5$ olarak düşünülebilir. Buna göre,

$[x+(-y)]^5 = \binom{5}{0}x^5(-y)^0 + \binom{5}{1}x^4(-y)^1 + \binom{5}{2}x^3(-y)^2 + \binom{5}{3}x^2(-y)^3 +$

$\binom{5}{4}x^1(-y)^4 + \binom{5}{5}x^0(-y)^5$

$= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$ tir.

c. $(2x+3y)^3 = \binom{3}{0}(2x)^3.(3y)^0 + \binom{3}{1}(2x)^2.(3y)^1 + \binom{3}{2}(2x)^1.(3y)^2 +$

$\binom{3}{3}(2x)^0.(3y)^3$

$= 8x^3 + 3.4x^2.3y + 3.2x.9y^2 + 1.27y^3$

$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ tür.

HATIRLAYALIM

$(x+y)^4$ ifadesinin açılımını ele alalım. Bu açılımdaki x^4, $4x^3y$, $6x^2y^2$, $4xy^3$, y^4 ifadelerinin her birine "terim" denir.

$1x^4$, $4x^3y$, $6x^2y^2$, $4xy^3$, $1y^4$ terimlerinde bulunan 1, 4 ve 6 sayılarına "katsayı" denir.

d. $\left(\frac{1}{x}-x\right)^6=\left[\frac{1}{x}+(-x)\right]^6$ olarak düşünülebilir. Buna göre,

$$\left[\frac{1}{x}+(-x)\right]^6=\binom{6}{0}\left(\frac{1}{x}\right)^6(-x)^0+\binom{6}{1}\left(\frac{1}{x}\right)^5(-x)^1+\binom{6}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^4(-x)^2+$$
$$\binom{6}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^3(-x)^3+\binom{6}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^2(-x)^4+\binom{6}{5}\left(\frac{1}{x}\right)^1(-x)^5+$$
$$\binom{6}{6}\left(\frac{1}{x}\right)^0(-x)^6$$
$$=\frac{1}{x^6}-6.\frac{1}{x^5}.x+15.\frac{1}{x^4}x^2-20.\frac{1}{x^3}x^3+15.\frac{1}{x^2}.x^4-6.\frac{1}{x}.x^5+x^6$$
$$=\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^4}+\frac{15}{x^2}+15x^2-6x^4+x^6-20 \text{ dir.}$$

Binom Açılımı ile Pascal Üçgeninin İlişkisi

Binom açılımındaki katsayılar Pascal üçgeni yardımıyla belirlenebilir. $(x+y)^n$ ifadesindeki katsayılar Pascal üçgeninin n. satırındaki sayılardır.

Açılım	Katsayılar	Pascal Üçgeni
$(x+y)^0$	$\binom{0}{0}$	1
$(x+y)^1$	$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$	1 1
$(x+y)^2$	$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$	1 2 1
$(x+y)^3$	$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$	1 3 3 1
$(x+y)^4$	$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$	1 4 6 4 1
⋮	⋮	⋮

Binom Açılımının Özellikleri

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\ldots+\binom{n}{r}x^{n-r}y^r+\ldots+\binom{n}{n}y^n$$

açılımında;

- $n+1$ tane terim vardır.
- Her bir terimdeki üslerin toplamı n dir.
- Açılım x in azalan kuvvetlerine göre yazıldığında baştan $(r+1)$. terim veya sondan $(n+1-r)$. terim $\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$ olur.

BUNLARI BİLİYOR MUYDUNUZ?

10. yüzyılın sonlarında iki terimli açılımların katsayılarının hesabında kullanılan aritmetik üçgenin (Pascal Üçgeni) kurallarını ifade ve ispat eden ilk matematikçinin Kerecî olduğunu biliyor muydunuz?

Kaynak: http://www.islamansiklopedisi.info/dia/pdf/c34/c340042.pdf

30. Örnek

$(2x-3y)^k$ ifadesinin açılımında 13 terim bulunduğuna göre k değerini bulalım.

$(2x-3y)^k$ açılımında $k+1$ terim bulunur. O hâlde,
$k+1=13 \Rightarrow k=12$ dir.

Sıra Sizde

$\left(4x-\frac{1}{2}\right)^m$ açılımında 11 terim bulunduğuna göre m değerini bulunuz.

31. Örnek

$(4a+5b)^p$ ifadesinin açılımındaki terimlerden biri $A.a^5.b^4\ (A\in\mathbb{R})$ tür. Buna göre p değerini bulalım.

$(4a+5b)^p$ ifadesinin açılımındaki her bir terimin üsleri toplamı p olmalıdır.

O hâlde $A.a^5.b^4$ terimine göre,
$p=5+4=9$ olur.

Sıra Sizde

$(4m-3n)^k$ ifadesinin açılımındaki terimlerden biri $A.m^8.n^7\ (A\in\mathbb{R})$ olduğuna göre k değerini bulunuz.

32. Örnek

$(2x-3)^4$ ifadesinin açılımını yaparak katsayılar toplamını ve sabit terimini bulalım.

$$(2x-3)^4=\binom{4}{0}(2x)^4+\binom{4}{1}(2x)^3(-3)^1+\binom{4}{2}(2x)^2(-3)^2+\binom{4}{3}(2x)^1(-3)^3+\binom{4}{4}(-3)^4$$
$$=16x^4-96x^3+216x^2-216x+81 \text{ dir.}$$

Katsayılar toplamı,
$16+(-96)+216+(-216)+81=1$ dir.

Sabit terim değişken içermeyen terim olan 81 dir.

Sıra Sizde

$(4x-2y)^8$ açılımındaki katsayılar toplamını ve sabit terimi bulunuz.

HATIRLAYALIM

Bir cebirsel ifadede değişkenden bağımsız olan terime "sabit terim" denir.

DİKKAT

$(x+y)^n$ ifadesinin açılımı yapılmadan da katsayılar toplamı ve sabit terimi bulunabilir.

- Açılımın katsayılar toplamı bulunurken değişkenler yerine 1 yazılır. "32. Örnek"te katsayılar toplamı, $x=1$ için, $(2.1-3)^4=(-1)^4=1$ dir.
- Açılımın sabit terimi bulunurken değişkenler yerine 0 (sıfır) yazılır. "32. Örnek"te sabit terim, $x=0$ için, $(2.0-3)^4=(-3)^4=81$ dir.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir sınıfta 15 kız, 16 erkek öğrenci vardır. Bu sınıftan seçilecek bir öğrenci kaç farklı biçimde belirlenebilir?

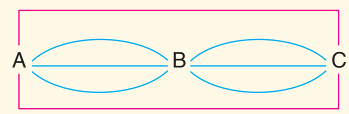
2. 10 soruluk bir testte her soru için 5 farklı seçenek bulunmaktadır. Art arda gelen soruların cevapları aynı olmayacağına göre bu test için kaç farklı cevap anahtarı oluşturulabilir?

3. "21. Şekil"de A, B ve C şehirlerinin arasındaki yollar gösterilmiştir.

a. A şehrinden C şehrine gitmek isteyen bir kişi kaç farklı yol kullanabilir?

b. Gidiş ve dönüşte B şehrine uğrayacak biri A şehrinden C şehrine gidip dönecektir. Kullandığı yolu tekrar kullanamayacak olan bu kişi kaç farklı yol kullanabilir?

21. Şekil



4. A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} kümesinin elemanları kullanılarak üç basamaklı;

a. Kaç doğal sayı oluşturulabilir?

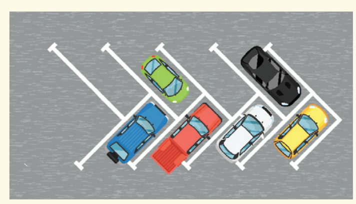
b. Rakamları farklı kaç doğal sayı oluşturulabilir?

c. Rakamları farklı kaç çift doğal sayı oluşturulabilir?

d. 300 ile 600 arasında kaç doğal sayı oluşturulabilir?

5. "PARE" kelimesindeki harfler kullanılarak anlamlı veya anlamsız 4 harfli kaç kelime oluşturulabilir?

6. Yandaki resimde gösterilen 6 araba 8 arabalık bir otoparka kaç farklı biçimde park edilebilir?



7. A = {1, 2, 3, 4, 5} kümesindeki elemanlar kullanılarak 4 basamaklı;

a. Kaç doğal sayı yazılabilir?

b. En az iki basamağı aynı olan kaç doğal sayı yazılabilir?

8. $\dfrac{(3!)!}{4!}$ işleminin sonucunu bulunuz.

9. $\dfrac{(n+4)!-(n+3)!}{(n+3)!-(n+2)!}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

10. $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}-\dfrac{n!}{(n-2)!}=-10$ eşitliğini sağlayan n değerlerini bulunuz.

11. m ve n doğal sayılar olmak üzere $6 \,.\, n! = m!$ eşitliğini sağlayan m değerlerinin toplamı kaçtır?

12. $P(n+2, 4) = 4 \,.\, P(n+2, 3)$ eşitliğini sağlayan n değerini bulunuz.

13. $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin 3 lü permütasyonlarının kaç tanesinde;

a. c elemanı bulunur?

b. a elemanı bulunur, b elemanı bulunmaz?

14. Birbirinden farklı 6 matematik, 3 fizik, 4 kimya kitabı bir rafa sıralanacaktır.

a. Kitaplar kaç farklı biçimde sıralanabilir?

b. Fizik kitapları bir arada olmak üzere kaç farklı biçimde sıralanabilir?

c. Aynı tür kitaplar yan yana gelecek biçimde kaç farklı şekilde sıralanabilir?

d. Matematik kitapları yan yana gelmeyecek biçimde kaç farklı şekilde sıralanabilir?

15. Aşağıdaki eşitlikleri gerçekleyen n değerlerini bulunuz.

a. $P(n, 4) = C(n, 5)$

b. $P(n, 3) = 4 \,.\, C(n, 4)$

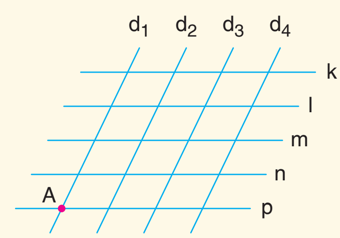
c. $P(4, 2) = C(3n, 1)$

16. 6 öğrenci arasından en az 2, en çok 5 kişilik kaç farklı grup oluşturulabilir?

17. Bir grup öğrenciden oluşturulabilecek 4 kişilik farklı ekiplerin sayısı, 5 kişilik farklı ekiplerin sayısına eşittir. Bu öğrenci grubundan 3 kişilik kaç farklı ekip oluşturulabilir?

18. 6 matematik kitabının arasından seçilecek 4 kitap, 3 kişiye kaç farklı biçimde dağıtılabilir?

22. Şekil



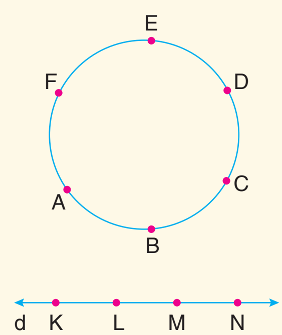
19. "22. Şekil"de $d_1 // d_2 // d_3 // d_4$ ve $k // l // m // n // p$ dir.

a. Köşeleri bu doğruların kesim noktaları olan kaç üçgen çizilebilir?

b. Şekilde kaç farklı paralelkenar vardır?

c. Şekilde bir köşesi A noktası olan kaç farklı paralelkenar vardır?

23. Şekil

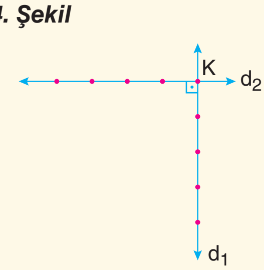


20. "23. Şekil"deki K, L, M, N noktaları d doğrusu üzerinde; A, B, C, D, E ve F noktaları çember üzerindedir. Köşeleri bu noktalardan geçen en çok kaç üçgen çizilebilir?

21. Bir apartmanda biri 5, diğeri 6 kişilik iki asansör bulunmaktadır. 11 kişi; belirli 3 kişi aynı asansörde olmayacak biçimde kaç farklı şekilde asansöre binebilir?

22. Haftada bir film değiştiren 6 sinemanın her birinde bir salon vardır. Bu sinemaların üçünde aynı film gösterilmektedir. Aynı hafta içinde 3 farklı film seyretmek isteyen bir izleyici kaç farklı seçim yapabilir?

24. Şekil



23. "24. Şekil"de $d_1 \perp d_2$ ve $d_1 \cap d_2 = \{K\}$ dır. Şekilde verilen 9 nokta kullanılarak kaç farklı dik üçgen oluşturulabilir?

24. Aralarında Ulaş ve Salih'in bulunduğu 9 kişi arasından 5 kişilik bir basketbol takımı seçilecektir. Ulaş'ın olup Salih'in olmadığı kaç farklı takım oluşturulabilir?

25. Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a. $\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+...+\binom{7}{7}$ **b.** $\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}$

26. $\binom{12}{a}+\binom{12}{a+1}=\binom{13}{7}$ ise a nın alabileceği değerleri bulunuz.

27. Aşağıdaki ifadelerin açılımlarını yazınız.

a. $(a-2)^3$ **b.** $(x+2y)^4$ **c.** $(2x+1)^5$ **d.** $(x^2-2)^3$

28. Aşağıdaki ifadelerin açılımlarındaki katsayılar toplamını bulunuz.

a. $(4x+2)^4$ **b.** $(2x-5)^6$ **c.** $(3a-4b)^{12}$ **d.** $(3x-y)^9$

29. Aşağıdaki ifadelerin açılımlarındaki sabit terimleri bulunuz.

a. $(3a-2)^7$ **b.** $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^4$ **c.** $(x^2-x)^7$ **d.** $(3x+y)^6$

30. $(4a^2-3b^3)^n$ ifadesinin açılımındaki terimlerden biri Aa^6b^6 olduğuna göre n kaçtır?

31. Aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

a. ☐ $(2a+c)^5$ ifadesinin açılımında katsayılar toplamı 243 tür.

b. ☐ $(x^2-3y)^5$ ifadesinin açılımında baştan 3. terimin katsayısı 270 tir.

c. ☐ $(a^2-1)^4$ ifadesinin açılımında sabit terim 1 dir.

d. ☐ $(x+2y)^5$ ifadesinin açılımında sabit terim 3 tür.

BÖLÜM 1.2

BASİT OLAYLARIN OLASILIKLARI

Olasılık

Orta Çağ'da İngiltere'de okçular için bir eğitim oyunu olarak ortaya çıkan dart her bir oyuncunun iç içe geçmiş halkalara peş peşe üç okla atış yaptığı bir yetenek oyunudur.

Sizce hedef gözetmeksizin (nişan almadan) yapılacak atışlarda okun hangi numaralı halkaya isabet etme olasılığı en yüksektir?

Deney Çıktı Örnek Uzay Olay	Bir durumla ilgili sonuçların elde edilmesi için yapılan işleme **deney,** deneyde elde edilen sonuçların her birine **çıktı**, mümkün olan tüm çıktılara **örnek uzay** denir. Örnek uzayın her bir çıktısına da **olay** denir.

1. Örnek

1 den 10 a kadar olan sayıları aynı özelliğe sahip 10 karta yazarak bir torbaya atalım. Torbadan rastgele bir kart çekilmesi durumuyla ilgili gözlemleri inceleyelim.

Torbadan bir kart çekildiğinde kartta yazan sayının kaç olacağını önceden bilemeyiz. Ancak bu sayılar; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 dan birisidir. Bu durumda torbadan rastgele kart çekme deneyinin olası tüm sonuçlarının kümesi {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} dur.

Sıra Sizde

Bir zar atılması deneyinde üst yüze gelebilecek sayıları gösteren kümeyi oluşturunuz.

2. Örnek

Bir madenî paranın arka arkaya 3 kez atılması deneyinde oluşan örnek uzayı bulalım.

Zar atma deneyinde oluşabilecek tüm sonuçları "25. Şekil"deki şema (diyagram) ile gösterebiliriz.

O hâlde bu deneyin örnek uzayı,

E = {YYY, YYT, YTY, TYY, YTT, TYT, TTY, TTT} dir.

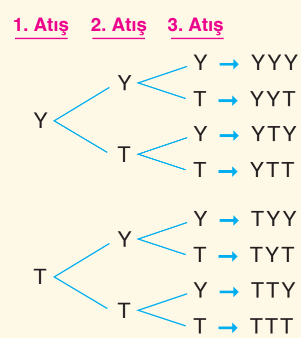
TERİMLER

- Örnek uzay
- Olay
- İmkânsız olay
- Kesin olay
- Deney
- Çıktı
- Ayrık olay
- Ayrık olmayan olay
- Bir olayın tümleyeni

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

- E
- P(A)
- P(A')

25. Şekil



Sıra Sizde

Bir madenî paranın arka arkaya iki kez atılması deneyinin örnek uzayını yazınız.

İmkânsız Olay Kesin Olay Eş Olasılıklı Olaylar Ayrık Olay	Olası tüm durumlarının kümesi; boş küme olan olaya **imkansız olay**, örnek uzaya eşit olan olaya da **kesin olay** denir. Bir örnek uzayın her bir olayının gerçekleşme olasılığı eşit ise bu tür olaylara **eş olasılıklı olaylar** denir. Bir örnek uzayda tanımlanan iki olayın ortak elemanı yoksa, başka bir deyişle aynı anda gerçekleşme olasılıkları bulunmayan iki olaya **ayrık olay** denir.

3. Örnek

1 den 9 a kadar (9 dâhil) sayıların özdeş kartlara yazılmış olduğu bir torbadan rastgele seçilen bir kartta yazan sayının;

a. Çift sayı olması **b. En çok 7 olması**

c. Negatif olması **d. Rakam olması**

kümelerinin elemanlarından biri olma olaylarını inceleyelim.

Torbadan rastgele kart çekme deneyinin örnek uzayının kümesi
E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} olur.

a. Çift sayı gelme olayı A olsun. E kümesinde çift olan sayılar 2, 4, 6 ve 8 olduğundan A = {2, 4, 6, 8} dir.

b. En çok 7 olma olayı B olsun. Bu koşulu sağlayan sayılar; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 olup B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} dir.

c. Negatif olma olayı C olsun. Örnek uzayın negatif olan herhangi bir elemanı olmadığından C olayı imkânsızdır. O hâlde C = ∅ dir.

d. Rakam olma olayı D olsun. Örnek uzaydaki tüm elemanlar rakam olduğundan D = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} olup D olayı kesin olaydır.

Sıra Sizde

Bir zar atılması deneyinde üste gelen sayının;

a. Tek sayı olması **b.** En çok 3 olması

c. İki basamaklı olması **d.** Rakam olması

kümesinin elemanlarından biri olma olaylarını inceleyiniz.

4. Örnek

İçinde 2 siyah, 3 mavi ve 4 kırmızı özdeş top bulunduran bir kavanozdan rastgele bir top çekilmesi deneyinde her bir rengin gelme durumlarını inceleyelim.

Kavanozdaki $2 + 3 + 4 = 9$ top örnek uzayın eleman sayısıdır.

Çekilen topun siyah olma olayı S ise $s(S) = 2$, çekilen topun mavi olma olayı M ise $s(M) = 3$ ve çekilen topun kırmızı olma olayı K ise $s(K) = 4$ tür.

Yukarıda tanımladığımız S, M ve K olaylarının her birinin eleman sayıları farklı olduğundan gerçekleşme olasılıkları da farklı olacaktır. Gerçekleşme olasılıkları farklı olan bu tür olaylara **eş olasılı olmayan olaylar** denir.

Sıra Sizde

1 den 4 e kadar dört rakam ile numaralandırılmış özdeş toplardan bir kavanoza 1 den 1 tane, 2 den 2 tane, 3 ten 3 tane ve 4 ten 4 tane konulmuştur.

Kavanozdan bir top çekilmesi deneyinde topta yazan sayıların her birinin gelme durumlarını inceleyip olayların eş olasılı olup olmadığını açıklayınız.

Bir Olayın Tümleyeni	Bir deney sonucunda elde edilen olayların kesişimi boş küme ve birleşimi de örnek uzayı oluşturuyorsa bu iki olaya **tümleyen olaylar** denir. Bir A olayının tümleyeni A' ile gösterilir.

5. Örnek

Bir zar atılması deneyinde üst yüze gelen sayının tek olma olayını ve çift olma olaylarını inceleyelim.

Zar atma deneyinde örnek uzay $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dır.

Üst yüze tek sayı gelme olayı T ise $T = \{1, 3, 5\}$ ve benzer şekilde üst yüze çift sayı gelme olayı Ç ise $Ç = \{2, 4, 6\}$ olur. T ve Ç olaylarının ortak elemanları olmadığından $T \cap Ç = \emptyset$ dir. Yani T ve Ç olayları ayrık olaylardır.

Üste gelen sayı tek ya da çift olacağından bu iki olay birbirinin tümleyenidir. Bu durum $T = Ç'$ şeklinde gösterilir.

Sıra Sizde

Bir zar atılması deneyinde üst yüze gelen sayının çift olma olayını ve asal olma olaylarını inceleyip bu iki olayın tümleyen olaylar olup olmadığını açıklayınız.

TARİH KÖŞESİ

El Kindi

(801 – 873)
(Temsilî resimdir.)

Irak'ta yaşamış olan El Kindi, İbn–i Sina ve Farabi'nin çalışmalarına etki etmiş tarihin ilk İslam filozofu olarak bilinmektedir.

Felsefeden tıbba, matematikten astronomiye, ilahiyattan siyasete, psikolojiden diyalektiğe, astrolojiden kehanete ve optikten kimyaya kadar yirmi ayrı dalda 277 civarında kitap yazan Kindi'den döneminin en iyisi ve her alanda bilgisi olan ender birisi olarak bahsedilir.

Hint ve Yunan matematiklerini inceleyip çalışmalarını bu iki sistemin eksiklik ve kusurlarını gidermek doğrultusunda yapan Kindi'nin yazdığı kitapların çoğu Moğol istilasında kaybolmuştur. Olasılığın kurucusu olarak tanınan Girolamo Cardano (Cirolamo Kardano) bir kitabında Kindi için Binom teoreminin gerçek sahibi olduğundan bahsederken "Orta Çağ'daki en büyük on iki bilim adamından biridir." ifadesini kullanmıştır.

Kaynak : http:// www.islamansiklopedisi.info/dia/pdf/c26/c260024.pdf

Bir Olayın Olasılığı	Eş olasılı E örnek uzayında A olayının olma olasılığı; A kümesinin eleman sayısının E kümesinin eleman sayısına bölümüne eşittir. $P(A)=\dfrac{s(A)}{s(E)}$ dir. Bir olayın olma olasılığı daima $0 \le P(A) \le 1$ aralığında değer alır. İmkânsız olayın olma olasılığı 0, kesin olayın olma olasılığı da 1 dir. Tümleyen olayların olma olasılıklarının toplamı 1 dir.

6. Örnek

Bir madenî parayı iki kez havaya attığımızda üste gelen yüzlerinin yazı olma olasılığını bulalım.

Örnek uzay $E=\{(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)\}$ dir. İki kez yazı gelme olayı $A=\{(Y, Y)\}$ dir. $s(E)=4$ ve $s(A)=1$ olur.

Buna göre A olayının olma olasılığı $P(A)=\dfrac{s(A)}{s(E)}=\dfrac{1}{4}$ bulunur.

Sıra Sizde

Bir zar atılması deneyinde üst yüze gelen sayının çift olma olasılığını bulunuz.

7. Örnek

İki zar aynı anda atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların;

a. Aynı olması

b. Toplamlarının 10 olması

c. Çarpımının tek olması

olasılıklarını hesaplayalım.

İki zar birlikte atılırsa örnek uzay "26. Şekil" deki tabloda görülen ikililer olur.

Buna göre $E=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (6, 6)\}$ dır. O hâlde örnek uzayın eleman sayısı 36 dır.

a. Aynı sayıların geldiği durumlar "26. Şekil" deki tablodan da görüldüğü üzere (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) ve (6, 6) olup 6 tanedir. O hâlde zarların üst yüzüne gelen sayıların aynı olma olasılığı, $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$ bulunur.

26. Şekil

2. Zar \ 1. Zar	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
⚁	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
⚂	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
⚃	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
⚄	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
⚅	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

TARİH KÖŞESİ

Pierre–Simon Laplace
(Piyer Saymın Laplas)

(1749 – 1827)
(Temsilî resimdir.)

Aynı zamanda astronom da olan Laplace, matematiğin birçok alanına kendi adıyla anılan teoriler bırakmıştır. Laplace, olasılık alanındaki "Laplace Şeytanı" teorisinden ilk kez "Olasılıklar Üzerine Denemeler" kitabında bahsetmiştir. Laplace Şeytanı, bizim şans olarak tanımladığımız rastlantısal olayları açıklamaya yönelik bir teoridir. Parayı attığımızda yazı veya tura gelmesi bizim için yüzde ellilik bir şansken Laplace'a göre sonucu değiştirmek bizim elimizdedir ve aslında şans diye bir şey yoktur. Ayrıca Laplace, olasılık kavramını, eş ölçüde olabilir durumlar arasında ilgilenilen olayı gerçekleştiren durumlara oranı biçiminde tanımlamıştır. Günümüzde de eş olasılı olayların olma olasılıklarını hesaplarken kullandığımız bu tanımı Laplace'a borçluyuz.

Kaynak : http:// dergipark.ulakbim.gov.tr/ausbf/article/download/5000094139/5000087569

b. Toplamları 10 olan durumlar (4, 6), (5, 5) ve (6, 4) olup 3 tanedir. O hâlde zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 10 olma olasılığı, $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ bulunur.

c. Çarpımların tek olması için iki zarın da tek gelmesi gerekmektedir. Bu durumlar (1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3) ve (5, 5) olup 9 tanedir. O hâlde zarların üst yüzüne gelen sayıların çarpımının tek olma olasılığı, $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$ bulunur.

Sıra Sizde

İki zarın aynı anda atılması deneyinde zarların üst yüzüne gelen sayıların;

a. Farklı olması

b. Toplamlarının 9 olması

c. Çarpımlarının 6 olması

olasılıklarını hesaplayınız.

8. Örnek

Bir zar atıldığında üste gelen sayının;

a. En çok 6 olma olasılığını

b. En az 7 olması olasılığını bulalım.

$E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olduğundan $s(E)=6$ dır.

a. A, zarın üst yüzüne gelen sayının en çok 6 olması olayı olsun. Bu durumda $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $s(A)=6$ olur.

$A=E$ olduğundan A kesin olaydır. O hâlde A olayının olasılığı,

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{6}{6}=1 \text{ bulunur.}$$

b. B, zarın üst yüzüne gelen sayının en az 7 olması olayı olsun. Örnek uzay kümesinde 7 ve 7 den büyük sayı bulunmadığından $B=\varnothing$ dir. (B imkânsız olaydır.) O hâlde $s(B)=0$ dır.

Bu durumda B olayının olasılığı,

$$P(B)=\frac{s(B)}{s(E)}=\frac{0}{6}=0 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

Bir zar atıldığında üste gelen sayının;

a. En az 1 olması olasılığını

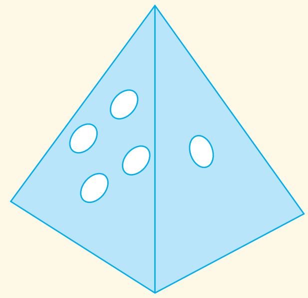
b. 8 olması olasılığını bulunuz.

9. Örnek

"27. Şekil"de düzgün dörtyüzlünün her bir yüzüne 1, 2, 3 ve 4 adet işaretlerden biri koyularak zar gibi kullanılacaktır. Her bir yüzün alta gelme (görünmeme) olasılığı üzerinde yazan sayı ile ters orantılı olan bu zarda, tek sayılardan birinin görünmeme durumlarında oyun kazanılacaktır.

Buna göre oyunun kazanılması ve kaybedilmesi olasılıklarını hesaplayalım.

27. Şekil



Orantının sabiti k olduğunda 1, 2, 3 ve 4 ün alta gelme olasılıkları sırasıyla; $\frac{k}{1}, \frac{k}{2}, \frac{k}{3}$ ve $\frac{k}{4}$ olur. Her atışta zardaki dört yüzden birisi alta geleceğinden bu dört olayın olma olasılıklarının toplamı kesin olay olacaktır. O hâlde,

$$\underset{(12)}{\frac{k}{1}}+\underset{(6)}{\frac{k}{2}}+\underset{(4)}{\frac{k}{3}}+\underset{(3)}{\frac{k}{4}}=1 \Rightarrow \frac{12k+6k+4k+3k}{12}=1 \Rightarrow \frac{25k}{12}=1 \Rightarrow k=\frac{12}{25} \text{ tir.}$$

DİKKAT

A ve A' tümleyen olaylar ise
$P(A)+P(A')=1$ dir.

Buna göre zarın altına 1 ve 3 gelme olasılıklarını sırasıyla,

$$\frac{k}{1}=\frac{\frac{12}{25}}{1}=\frac{12}{25} \text{ ve } \frac{k}{3}=\frac{\frac{12}{25}}{3}=\frac{4}{25} \text{ bulunur.}$$

Oyunu kazanma olasılığı olan $P(A)$, ayrık olaylar olan 1 ve 3 yüzlerinin alta gelme olasılıklarının toplamından, $P(A)=\frac{12}{25}+\frac{4}{25}=\frac{16}{25}$ bulunur.

Oyunu kazanma ve kazanamama durumları tümleyen olaylar olup olasılıklarının toplamı 1 olacağından zarı atan kişinin oyunu kazanamama olasılığı,

$$P(A)+P(A')=1 \Rightarrow \frac{16}{25}+P(A')=1 \Rightarrow P(A')=\frac{9}{25} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

"9. Örnek"te zarın her bir yüzün alta gelme olasılığı, üzerindeki sayıyla doğru orantılı olacak şekilde ayarlanıp hileli bir hale dönüştürülüyor. Zar atıldığında çift sayılardan birinin görünmemesi oyunu kazandıracağına göre oyunu kazanma ve kaybetme olasılıklarını bulunuz.

10. Örnek

Tarih öncesi çağlarda mağaralarda barınan, hayvanlar kadar çevik ve güçlü olmayan insanlar yaşamlarını sürdürebilmek için zekâlarının yardımıyla yandaki gibi keskin ve sert taşları kullanarak avcılık yapmışlardır. Tarım ve hayvancılığın olmadığı o zamanlarda ailelerinin güvenlik ve gıda ihtiyacından sorumlu olan erkekler, işbirliği içerisinde avlanıp büyük avları yaşam alanlarına yardımlaşarak taşımaktaydı. Tarım ve hayvancılığa geçtikten sonra da avlanmaya devam eden insanlar günümüzde avcılığı hobi ya da spor olarak yapmaktadır. Hobi amaçlı avcılık yapan bir avcının bir atışta cansız bir hedefi vurma olasılığı olan $P(A)$ ile vuramama olasılığı $P(A')$ arasında $3.P(A)=4.P(A')$ ilişkisi bulunmaktadır.

Buna göre avcının hedefi vurma olasılığını bulalım.

k sabit bir sayı olmak üzere $3.P(A)=4.P(A')$ ise $P(A)=4k$ ve $P(A')=3k$ olur. A ve A' tümleyen olaylarının olasılıklarının toplamı 1 olacağından, $4k+3k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{7}$ dir.

O hâlde avcının hedefi vurma olasılığı, $P(A)=4k=4.\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$ bulunur.

Sıra Sizde

Hileli bir madenî paranın yazı gelme olasılığı $P(Y)$ ile tura gelme olasılığı $P(T)$ arasında $3.P(Y)=2.P(T)$ ilişkisi bulunduğuna göre madenî paranın yazı gelme olasılığını bulunuz. *(Madenî parada yazı ve tura gelme olaylarının tümleyen olaylar olduğuna dikkat ediniz.)*

11. Örnek

15 kişilik bir sınıfta futbol, basketbol ve futbol ile basketboldan ikisini de oynayan öğrenciler bulunmaktadır.

Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin futbol oynuyor olma olasılığı $\frac{2}{3}$ olduğuna göre sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin basketbol oynayan bir öğrenci olma olasılığının en küçük değerini bulalım.

Sınıftan seçilen öğrencinin futbol oynama olayını F, basketbol oynama olayını B, örnek uzayı da E ile gösterelim. Sınıfta futbol oynayan öğrenci sayısını bulalım.

$$P(F)=\frac{s(F)}{s(E)} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{s(F)}{15}$$

$$\Rightarrow s(F)=10 \text{ dur.}$$

Buna göre sınıfta sadece basketbol oynayan $s(F')=15-10=5$ kişi vardır. Sınıftaki öğrencilerin sayıları "28. Şekil"de gösterilmiştir. Sınıftan rastgele seçilen bir öğrenci futbol ve basketbol oyunlarından ikisini de oynuyor olabileceğinden F ve B olayları ayrık olmayan olaylardır.

Aynı örnek uzayı oluşturan ve ayrık olmayan iki olayın olma olasılıklarının toplamı $P(E)=1$ den büyük olduğundan,

$$P(F)+P(B)>P(E) \Rightarrow \frac{2}{3}+\frac{s(B)}{s(E)}>1$$

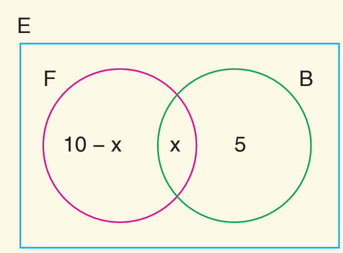
$$\Rightarrow \frac{2}{3}+\frac{5+x}{15}>1$$

$$\Rightarrow \frac{5+x}{15}>\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 5+x>5$$

$$\Rightarrow x>0 \text{ dır.}$$

28. Şekil



Buradan futbol ve basketbolu aynı anda oynayan öğrenci sayısı en az 1 bulunur. Bu durumda sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin basketbol oynayan bir öğrenci olma olasılığının en küçük değeri

$$P(B)=\frac{s(B)}{s(E)}$$
$$=\frac{6}{15}$$
$$=\frac{2}{5} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

28 kişilik bir sınıfta futbol, basketbol ve futbol ile basketboldan ikisini oynayan öğrenciler bulunmaktadır. Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin futbol oynuyor olma olasılığı $\frac{2}{7}$ olduğuna göre sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin basketbol oynayan bir öğrenci olma olasılığının en küçük değerini bulunuz.

12. Örnek

A ve B olayları E örnek uzayında herhangi iki olay olsun.

$P(A)=\frac{2}{3}$ ve $P(B')=\frac{3}{5}$ olduğuna göre A' ile B olaylarının olma olasılıklarını bulup A ve B olaylarının ayrık olaylar olup olmadıklarını belirleyelim.

Tümleyen olayların olasılıklarının toplamı 1 olacağından,

$$P(A)+P(A')=1 \Rightarrow \frac{2}{3}+P(A')=1$$
$$\Rightarrow P(A')=1-\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow P(A')=\frac{1}{3} \text{ ve}$$

$$P(B)+P(B')=1 \Rightarrow P(B)+\frac{3}{5}=1$$
$$\Rightarrow P(B)=1-\frac{3}{5}$$
$$\Rightarrow P(B)=\frac{2}{5} \text{ bulunur.}$$

A ve B olaylarının olma olasılıklarının toplamı,

$$P(A)+P(B)=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{16}{15} \text{ tir}$$

Aynı örnek uzayın iki olayının olma olasılıkları toplamı $P(E)=1$ den büyükse bu iki olay ayrık olmayan olaylardır. A ve B olaylarının olma olasılıklarının toplamı $\frac{16}{15}>1$ olduğundan A ve B olayları ayrık olmayan olaylardır.

Sıra Sizde

A ve B olayları, E örnek uzayında herhangi iki olay olsun. $P(A')=\frac{2}{5}$ ve $P(B)=\frac{3}{4}$ olduğuna göre A ile B' olaylarının olma olasılıklarını bulup A ve B olaylarının ayrık olaylar olup olmadıklarını bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara (D), yanlışsa (Y) yazınız.

a. ☐ Aynı anda gerçekleşme olasılıkları bulunmayan A ve B olayları ayrıktır.

b. ☐ İki zar atıldığında örnek uzayın eleman sayısı 12 olur.

c. ☐ Rakamlar kümesinden rastgele seçilen bir sayının asal olma olasılığı $1/2$ dir.

d. ☐ Ayrık olaylar daima birbirinin tümleyenidir.

e. ☐ Birbirinin tümleyeni olan olaylar ayrık olaylardır.

2. Aşağıdaki deneylere ait örnek uzayları ve bunlara ait olayların kümesini yazınız.

a. Madenî bir paranın havaya atılması deneyinde, üste tura gelmesi olayı

b. Bir zarın atılması deneyinde, üst yüze gelen sayının 1 olması olayı

c. Rakamlar kümesinden rastgele seçilen sayının en az 1 olması olayı

d. Bir zar ve bir paranın birlikte atılması deneyinde, paranın yazı ve zarın 3 gelmesi olayı

3. Aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerleri uygun bir şekilde doldurunuz.

a. Bir zarın atılması deneyinde üste gelen sayının en çok 6 olma olayı .... olay, en az 7 gelmesi olayı ise .... olayıdır.

b. Bir örnek uzayda tanımlanan her bir olayın gerçekleşme olasılıkları aynı değil ise bu tür olaylara .... olaylar adı verilir.

c. Tümleyen iki olay aynı anda ....

d. Bir örnek uzayın A olayının olma olasılığı ile olmama olasılığının toplamı .... dir.

4. Bir okuldaki basket takımlarından lise kategorisi erkeklerden, ilköğretim kategorisi de kızlardan kurulmuştur. Buna göre,

   a. Lise takımından seçilen bir öğrencinin erkek olma olasılığı kaçtır?

   b. İlköğretim takımından seçilen bir öğrencinin erkek olma olasılığı kaçtır?

   c. Basket takımlarındaki tüm öğrencilerden seçilen bir öğrencinin kız olma olasılığı ile erkek olma olasılıklarının toplamı kaçtır?

5. İki madenî para aynı anda havaya atılıyor. Buna göre;

   a. Paraların üst yüzlerine aynı tarafların gelme olasılığı kaçtır?

   b. Paraların üst yüzlerine en az bir kez yazı gelme olasılığı kaçtır?

6. İki kişinin koşacağı bir antrenman yarışında yarışı birincinin kazanma olasılığı ikincinin 4 katıdır. Buna göre yarışı kaybetme olasılığı fazla olanın olasılığı kaçtır?

7. İki zar atılması deneyinde üst yüzlere gelen sayıların,

   a. İkisinin de çift olma olasılığı kaçtır?

   b. Çarpımlarının çift olma olasılığı kaçtır?

   c. Toplamlarının 11 olma olasılığı kaçtır?

8. Bir küpün yüzlerinden dördüne K, İ, T, A ve kalan iki yüzüne de P harfleri yazılmıştır. Bu küp bir kez havaya atıldığında görülebilen yüzlerinde sırasına ve yönüne bakılmaksızın K, İ, T, A, P harflerinin görülme olasılığı kaçtır?

9. Bir avcının bir atışta hedefi vurma olasılığı, vuramama olasılığının iki katıdır. Buna göre bu avcının hedefi vurma ve vuramama olasılıklarını bulunuz.

10. Bir torbada üzerinde ilk 5 doğal sayının yazılı olduğu özdeş 5 top vardır. Bu torbaya üzerinde bazı sayıların yazılı olduğu toplar atılacaktır. Buna göre toplarda yazan,

   a. Sayı 5 olursa önceki duruma göre 5 yazılı top çekme olasılığındaki değişimi açıklayınız.

   b. Sayı 0 olursa önceki duruma göre 5 yazılı top çekme olasılığındaki değişimi açıklayınız.

   c. Sayı 3 olursa 1 yazılı top çekme olasılığı kaç olur?

11. İçinde bir miktar mavi, 4 sarı ve 2 beyaz özdeş top bulunan bir torbadan rastgele bir top çekiliyor. Çekilen topun mavi renkte <u>olmama</u> olasılığı $\frac{3}{5}$ olduğuna göre torbada kaç tane mavi top vardır?

1. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a. $4!$

b. $6!$

c. $8!$

d. $\frac{9!}{7!}$

e. $\frac{10!-8!}{7!}$

f. $\frac{9!.8!}{7!.6!.8}$

g. $P(3, 1)$

h. $P(10, 3)$

i. $P(9, 6)$

j. $C(8, 3)$

k. $C(7, 1)$

l. $C(12, 9)$

m. $\frac{8!.6!}{7!.4!}$

n. $\frac{10!+12!}{10!+11!}$

o. $\frac{1}{9!}-\frac{1}{10!}$

p. $\frac{1}{12!}+\frac{1}{11!}+\frac{1}{10!}$

2. Bir sınavda öğrenciler 10 sorunun 8 ini cevaplamak zorundadır. Bir öğrenci bu 10 sorudan 8 ini kaç farklı biçimde seçebilir?

3. Ayşe, Betül, Filiz ve Deniz yan yana fotoğraf çektireceklerdir. Dört arkadaş kaç farklı biçimde fotoğraf çektirebilir?

4. Aşağıdaki eşitliklerde, eşitlikleri sağlayan n değerlerini bulunuz.

a. $\frac{(n+5)!}{(n+4)!}=12$

b. $C(9, 2) + C(7, n) = 43$

5. Bir moda tasarımcısı elindeki 8 farklı renkteki kadife ve 5 farklı renkteki ipek kumaşlardan elbise tasarımı yapıyor.

a. Tasarımcı elindeki kumaşlardan birini kaç farklı biçimde seçebilir?

b. Tasarımcı bir elbise için 3 farklı kumaş kullanmak isterse kumaş seçimini kaç farklı biçimde yapabilir?

6. 20 kişinin katıldığı bir sınavda, sınava girenlerin sınavı kazanıp kazanamama durumu kaç farklı biçimde gerçekleşebilir?

7. Alfabedeki harfler kullanılarak tersten okunuşu kendisi ile aynı olan anlamlı ya da anlamsız 3 harfli kaç farklı kelime oluşturabilir?

8. İçerisinde 4 rakamının bir kez kullanıldığı üç basamaklı kaç doğal sayı yazılabilir?

9. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}+\frac{(n+1)!}{n!}=36$ eşitliğini gerçekleyen n değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

10. 9 kişinin finale kaldığı bir bilgi yarışmasında ilk üçe girenlere ödül verilecektir. Ödüller kaç farklı biçimde dağıtılabilir?

A) 720 B) 560 C) 504 D) 450 E) 420

11. 4 kız ve 4 erkek aynı cinsiyetten iki kişi yan yana gelmemek koşuluyla aynı sıradaki 8 koltuğa kaç farklı biçimde oturabilir?

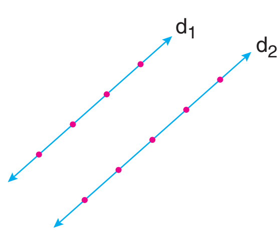
12. Bir A kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin sayısı 2 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşittir. Bu kümenin en az 4 elemanlı kaç alt kümesi olduğunu bulunuz.

13. A = {2, 4, 6, 8, a, b, c} kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde 2 ve 4 elemanları bulunur, a elemanı bulunmaz?

14. 5 doktor ve 6 mühendisin bulunduğu gruptan 4 kişilik bir ekip oluşturulacaktır. En çok 2 si mühendis olan bir ekip kaç farklı biçimde oluşturulabilir?

A) 60 B) 150 C) 215 D) 275 E) 360

15.



Yukarıdaki şekilde $d_1 // d_2$ dir. d_1 doğrusunun üzerinde 4, d_2 doğrusunun üzerinde de 5 nokta belirlenmiştir. Buna göre;

a. Köşeleri bu noktalar olan kaç farklı üçgen çizilebilir?

b. Köşeleri bu noktalar olan kaç farklı çokgen çizilebilir?

16. 12 soruluk bir sınavda her öğrenci 6 soru cevaplandıracaktır. Ayrıca her öğrenci ilk 5 sorudan en az 4 tanesini cevaplamak zorundadır. Buna göre bir öğrenci soru seçimini kaç farklı biçimde yapabilir?

17. Bir otelde biri 4 diğeri 3 kişilik iki oda kiralanmıştır. 6 kişiden belli ikisi aynı odada olmamak koşuluyla, 6 kişi bu iki odada kaç farklı biçimde kalabilir?

18. $\binom{15}{n+1} = \binom{15}{2n-1}$ eşitliğini sağlayan n değerlerinin toplamı kaçtır?

19. $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5}$ işleminin sonucunu bulunuz.

20. Aşağıdaki noktalı yerleri uygun ifadelerle doldurunuz.

a. $(x - 2y)^3$ ifadesinde sabit terim bulunurken x ve y yerine .... yazılır.

b. $(2x - y)^7$ ifadesinin açılımında .... terim vardır.

1. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

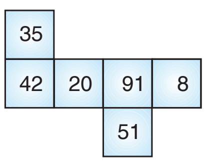
21. Bir deney A, B, C gibi 3 ayrı durum ile sonuçlanabilmektedir. Sonucun A olma olasılığı, B olma olasılığının 2 katı, C olma olasılığının da 3 katıdır.

Buna göre sonucun C olma olasılığı nedir?

22. Hilesiz bir zar atılıyor.

Zarın üst yüzeyine gelen sayının tek olan asal sayı olma olasılığı nedir?

23. Açınımı yandaki şekilde de verilen küp yuvarlanıp durduğunda üst yüzünde okunan sayının 3 ile bölünebilme olasılığı kaçtır?

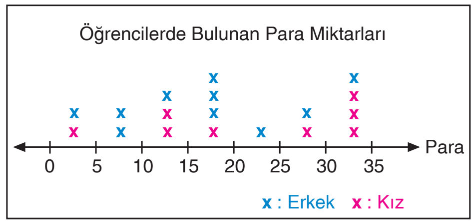


24. İçinde 15 kart bulunan bir torbadan sarı kart çekme olasılığı $\frac{1}{5}$ tir.

Buna göre torbaya kaç yeşil kart atılırsa sarı kart çekme olasılığı $\frac{1}{10}$ olur?

A) 3 B) 5 C) 10 D) 12 E) 15

25.



Yukarıdaki grafiğe göre sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin 25 TL değerindeki kalemliği satın alabilme olasılığı kaçtır?

26. Herkesin en az bir dersten başarılı olduğu 20 kişilik bir sınıfta 13 kişi Türkçe, 15 kişi de matematik dersinden başarılı olmuştur.

Seçilen öğrencinin iki dersten de başarılı olmuş olma olasılığı kaçtır?

27. Bir torbada mavi ve kırmızı renkte özdeş bilyeler vardır. Torbadan alınan bir bilyenin kırmızı olma olasılığı $\frac{2}{9}$ dir.

Torbada 4 kırmızı bilye olduğuna göre mavi bilye sayısı kaçtır?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 18 E) 27

28. Bir yarışmada Ali'nin birinci olma olasılığı $\frac{2}{7}$ ise Ali dışındaki birinin birinci olma olasılığı kaçtır?

1. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

Bir torbada 1 den 15 e kadar numaralandırılmış özdeş 15 top vardır.

Buna göre aşağıdaki 29, 30, 31 ve 32 numaralı soruları yukarıdaki bilgiye göre cevaplandırınız.

29. Torbadan çekilen bir topun üzerindeki sayının 4 ten küçük olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{4}{15}$

30. Torbadan çekilen bir topun üzerindeki sayının çift sayı olmama olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{7}{15}$ C) $\frac{8}{15}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

31. Torbadan çekilen bir topun üzerindeki sayının asal sayı olmama olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{7}{15}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

32. Torbadan çekilen bir topun üzerindeki sayının pozitif olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 1

33. Bir küpün 4 yüzü yeşile, 1 yüzü maviye ve 1 yüzü de sarıya boyanıyor.

Küp düz bir masaya atıldığında sarı yüzün görünmeme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{1}{6}$

34. Özdeş 3 mavi, 4 yeşil ve 5 kırmızı bilyenin bulunduğu bir torbadan rastgele seçilen bir bilyenin yeşil olmama olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{5}{12}$

35. Bir sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin kız olma olasılığı $\frac{2}{5}$ dir.

Bu sınıfta 12 tane kız öğrenci varsa kaç tane erkek öğrenci vardır?

A) 30 B) 24 C) 18 D) 16 E) 12

36. Aşağıdakilerden hangileri kesinlikle doğrudur?

I. Atılan bir zarın tek ya da çift gelmesi olasılığı eşittir.

II. Atılan bir zarın en az 6 gelmesi imkânsız olaydır.

III. Atılan bir paranın dik gelme olasılığı $\frac{1}{3}$ tür.

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve III
D) II ve III E) I, II ve III

2. ÜNİTE

FONKSİYONLAR

Neler Öğreneceğiz?

- Fonksiyon kavramını ve farklı türlerde gösterimlerini,
- Fonksiyonların grafiklerini,
- İki fonksiyonun bileşkesini,
- Fonksiyonların günlük hayatımızda kullandığımız uygulamalarını öğreneceğiz.

Neden Öğrenmeliyiz?

Günlük hayatımızda karşılaştığımız hemen hemen her durumun bir fonksiyonla modellenmesi mümkündür. Mesela yatayla belirli bir açı yapacak şekilde fırlatılan cisimlerin hareketlerinin herhangi bir noktasındaki hızları, ivmeleri vb. değişkenleri fizik bilimi ile incelenirken; bu cisimlerin yörüngeleri, ikinci dereceden fonksiyonların grafikleri şeklinde olduğundan cisimlerin ne kadar uzağa düşeceği, ne kadar yükseğe çıkabileceği vb. değişkenler ise matematik bilimi ile incelenir. Bu noktadan hareketle uzay araştırmaları için kullanılan modüllerin yörüngelerinin hesaplanmasında ve savunma sanayiindeki araştırma geliştirme çalışmalarında fonksiyonlar ve grafikleri yoğun bir biçimde kullanılmaktadır.

ÖNCEKİ BİLGİLERİNİ TEST ET

1. Aşağıda verilen sayı örüntülerini ifade eden kuralları yazınız.

a. 3 , 6 , 9 , 12 , ...

b. 1 , 3 , 5 , 7 , ...

c. 2 , 5 , 8 , 11 , ...

d. 5 , 9 , 13 , 17 , ...

2. Aşağıdaki sıralı ikililerin eşitliklerini sağlayan x ve y sayıları için x + y değerlerini bulunuz.

a. $(x + 1, 3) = (5, 2 - y)$

b. $(2x, 3y - 1) = (-6, -10)$

c. $(12, 3x - 4) = (2y + 2, 14)$

d. $(x.y, 2) = (18, y - 1)$

3. $A = \{1, 2\}$, $B = \{5, 6\}$ kümeleri için A x B ve B x A kümelerini yazınız.

4. $A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$ olduğuna göre A ve B kümelerini yazınız.

5. $x + 3y = 10$ doğrusu için aşağıdaki noktalardan kaç tanesi bu doğrunun üzerindedir?

a. $(0, 3)$

b. $(-1, 4)$

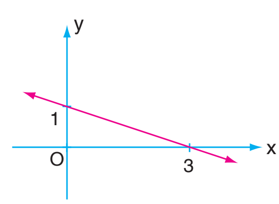
c. $(-2, 4)$

d. $(10, 0)$

e. $(4, 6)$

f. $(16, -2)$

6. Yandaki şekilde verilen doğru grafiğine göre bu doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?



A) $3x + y = 1$

B) $x + 3y = 1$

C) $x + y = 3$

D) $3x + y = 3$

E) $x + 3y = 3$

BÖLÜM 2.1

FONKSİYON KAVRAMI VE GÖSTERİMİ

Fonksiyon Kavramı

Günlük hayatımızdaki birçok durum kendisi dışındaki durumlara bağlı olarak değişir. Hareket halindeki bir aracın deposundaki yakıtın zamana bağlı değişimi, manavdan alınan domatesin fiyatının alınan miktara bağlı değişimi bu durumlara örnek olarak verilebilir.

Hayatımızdaki bu durumlara benzer sayısız çokluktaki durumları fonksiyon kavramını kullanarak matematiksel olarak ifade edebiliriz.

Bu ünitede fonksiyon ile ilgili kavramları, fonksiyonların farklı ifade biçimlerini, fonksiyon türlerini ve onları nasıl kullanabileceğimizi öğreneceğiz.

TERİMLER

- Fonksiyon
- Fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümesi
- Fonksiyonun grafiği
- İçine, örten ve bire bir fonksiyon
- Düşey doğru testi
- Birim fonksiyon
- Sabit fonksiyon
- Doğrusal fonksiyon
- Eşit fonksiyon

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

- $f : A \longrightarrow B$
- $f(A)$
- $y = f(x)$
- $f + g$
- $f - g$
- $f . g$
- $\frac{f}{g}$
- I

1. Örnek

Aşağıda, bir manavdan alınan domates miktarına bağlı olarak değişen fiyat ilişkisini inceleyelim.

Kilogram fiyatı 4 TL olan domatesten 1, 2, 4 ve 8 kg alan farklı müşteriler sırasıyla 4, 8, 16 ve 32 TL ödemişlerdir. Ancak domates dışında ürünler alıp manava 10 ve 15 TL lik ödemelerin de yapıldığını düşünelim.

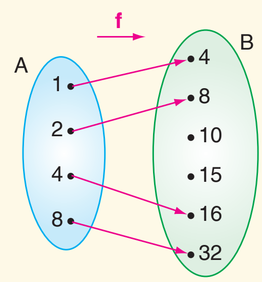
A = { Alınan domates miktarı (kg) } = { 1, 2, 4, 8 }

B = { Ödenen paralar (TL) } = { 4, 8, 10, 15, 16, 32 }

A kümesinde bulunan miktarları B kümesindeki fiyatlarıyla $1 \rightarrow 4$, $2 \rightarrow 8$, $4 \rightarrow 16$ ve $8 \rightarrow 32$ şeklinde eşleyebiliriz. Bu eşlemeyi yaptığımız kuralı f olarak adlandırırsak bu kuralı "1. Şekil" deki gibi gösterebiliriz. f kuralına göre;

- A kümesindeki her bir ok B kümesindeki yalnız bir elemanla eşleşmiştir. *(Aynı tutarda ödeme yapan kişiler aynı miktarda domates almıştır.)*
- A kümesinde açıkta eleman kalmamıştır. *(Domates aldığımızda parasını ödemek zorundayız.)*

1 . Şekil



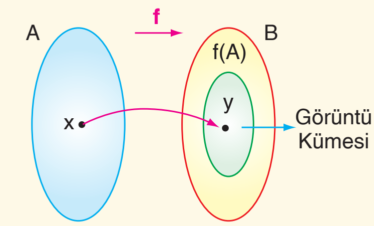
Matematikte iki kümenin elemanlarını yukarıda verdiğimiz iki şartı sağlayarak eşleyen kurallara fonksiyon denir. O hâlde tanımladığımız f kuralı bir fonksiyondur.

Sıra Sizde

Dini bayramlar yakınların bir araya toplandığı, küçük aile bireylerinin büyüklerinin ellerini öptüğü aile birliğinin öneminin kavrandığı zamanlardır. Bir ailenin 2 çocuğu, bayramda dede ve ninelerinin ellerini öpecektir. Buna göre torunların ellerini öptüğü dede ve ninelerine eşlendiği ilişkinin bir fonksiyon olup olmadığını inceleyiniz.

Fonksiyon Tanım Kümesi Değer Kümesi Görüntü Kümesi	• Boş olmayan iki kümeden biri olan A kümesinin her bir elemanını B kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişkiye **A dan B ye tanımlı fonksiyon** denir. Fonksiyonlar genellikle f harfiyle gösterilir. • A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere f, A dan B ye tanımlı bir fonksiyon ise; **i.** A nın her bir elemanı, B nin yalnız bir elemanı ile eşlenir. **ii.** A da eşlenmeyen eleman yoktur. • Bir A kümesinden B kümesine tanımlı f fonksiyonu kısaca $f : A \to B,\ x \to y = f(x)$ şeklinde gösterilir. Burada **A** ya fonksiyonun **tanım kümesi, B** ye ise fonksiyonun **değer kümesi** denir. A nın eşlendiği **f(A)** kümesine de **görüntü kümesi** denir.

2 . Şekil



2. Örnek

"3. Şekil" de verilen f fonksiyonunu, f fonksiyonunun tanım, görüntü ve değer kümesini liste biçiminde yazalım.

a. f fonksiyonunun tanım kümesi, $A = \{a, b, 7, 8\}$ dir.

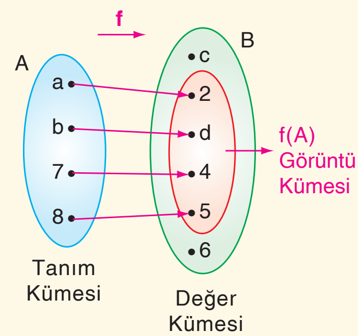
b. f fonksiyonunun değer kümesi, $B = \{c, 2, d, 4, 5, 6\}$ dır.

c. f fonksiyonunun görüntü kümesi, $f(A) = \{2, d, 4, 5\}$ tir.

Yukarıdaki f fonksiyonunu, "3. Şekil" de gösterildiği gibi sıralı ikililerin kümesi şeklinde yazabiliriz. Bu sıralı ikililerin birinci bileşenlerini f fonksiyonunun tanım kümesinin elemanları, ikinci bileşenlerini ise bu elemanların eşleştiği görüntü kümesinin elemanları oluşturur. O hâlde "3. Şekil" de şema ile gösterilen f fonksiyonunu liste biçiminde,

$f = \{(a, 2), (b, d), (7, 4), (8, 5)\}$ şeklinde gösterebiliriz.

3 . Şekil



Sıra Sizde

Tanesi 2 TL olan gofretlerden satan bir bakkala gelen 7 müşteriden 4 ü sadece 2, 5, 1, 3 tane gofret alarak çıkmıştır. Bakkalın kasasına giren paralar 15, 13, 4, 10, 2, 6, 3 TL dir.

a. Buna göre alınan gofret miktarı ile ödenen para arasındaki ilişkiyi liste biçiminde yazınız.

b. Her bir gofret alışverişini kasadaki paralara eşleyen bir f kuralı tanımlayıp bu kuralı şema ile gösteriniz.

c. f kuralı bir fonksiyon ise tanım, değer ve görüntü kümelerini yazınız.

3. Örnek

Aşağıda iki kümenin elemanları arasındaki ilişki f_1 ve f_2 ile gösterilmiştir. Bu ilişkilerin bir fonksiyon belirtip belirtmediğini açıklayalım.

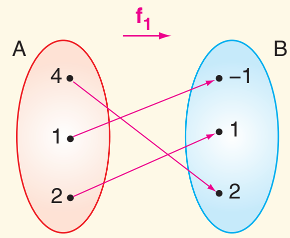
a. $f_1 = \{(4, 2), (1, -1), (2, 1)\}$

b. $f_2 = \{(-8, 4), (5, -1), (5, 3), (10, -2)\}$

a. Tanım kümesi $\{4, 1, 2\}$, görüntü kümesi $\{-1, 1, 2\}$ dir. Tanım kümesindeki her bir eleman, görüntü kümesinin yalnız bir elemanı ile eşleştiğinden f_1 ile gösterilen ilişki bir fonksiyondur. f_1, "4. Şekil"de şema ile gösterilmiştir.

b. Tanım kümesi $\{-8, 5, 10\}$, görüntü kümesi $\{4, -1, 3, -2\}$ dir. Tanım kümesindeki 5 elemanı görüntü kümesinin iki farklı elemanı olan -1 ve 3 ile eşleştiğinden f_2 ile gösterilen ilişki fonksiyon değildir. f_2, "5. Şekil"de tablo ile gösterilmiştir.

4 . Şekil



5 . Şekil

x	y
−8	4
5	−1
5	3
10	−2

$(x, y) \in f_2$

Sıra Sizde

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ olduğuna göre $A \rightarrow B$ ye tanımlı aşağıdaki ilişkilerden hangilerinin fonksiyon olduğunu belirleyiniz. Fonksiyon olanların görüntü kümelerini yazınız.

a. $f_1 = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$

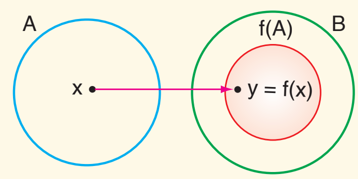
b. $f_2 = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d)\}$

c. $f_3 = \{(3, a), (2, b), (1, b), (4, 4)\}$

d. $f_4 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

- $(x, y) \in f$ yerine daha çok $y = f(x)$ *(f fonksiyonu, x değeri ile y değerini eşleştirir.)* gösterimi kullanılır.
- $(x, y) \in f$ ve $y = f(x)$ ise $(x, f(x)) \in f$ olur.

6. Şekil



4. Örnek

$A = \{-1, 0, 1\}$ ve $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ kümeleri arasında $f: A \rightarrow B$, $x \rightarrow 2x + 1$ şeklinde bir ilişki tanımlanmıştır.

Bu ilişkinin bir fonksiyon olup olmadığını belirleyelim. Fonksiyon ise görüntü kümesini yazalım, grafiğini çizelim.

$f(x) = 2x + 1$ ise $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$

$f(0) = 2 \cdot (0) + 1 = 1$ ve

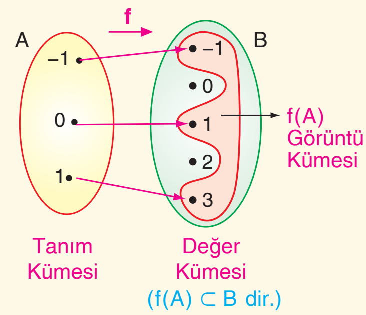
$f(1) = 2 \cdot (1) + 1 = 3$ olur.

O hâlde $f = \{(-1, -1), (0, 1), (1, 3)\}$ olur.

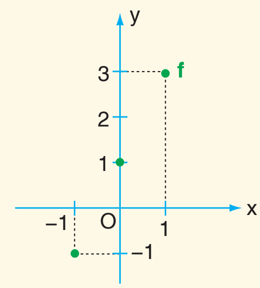
f yi "7. Şekil"deki gibi şema ile gösterebiliriz. f, A dan B ye bir fonksiyondur. Çünkü f ile A nın her elemanı B nin yalnız bir elemanına eşlenmiş ve A da eşlenmedik eleman kalmamıştır. f fonksiyonunun görüntü kümesi $f(A) = \{-1, 1, 3\}$ tür.

f fonksiyonunu oluşturan her bir sıralı ikiliyi koordinat sisteminde gösterirsek f fonksiyonunun grafiğini çizmiş oluruz (8. Şekil).

7. Şekil



8. Şekil



Sıra Sizde

$A = \{-1, 1, 2, 4\}$, $B = \{-4, 0, 2, 4, 5, 6, 7\}$ ve $f : A \to B$, $x \to x + 3$ fonksiyonu veriliyor.

a. f fonksiyonunu liste biçiminde yazınız.

b. $f(A)$ kümesini liste biçiminde yazınız.

c. f fonksiyonunun şemasını çiziniz.

d. f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

5. Örnek

Aşağıda verilen fonksiyonlar için istenilen değerleri bulalım.

a. $\mathbf{f(x) = |x + 3| - 5}$ **ise** $\mathbf{f(1)}$ **kaçtır?**

b. $\mathbf{g(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3}$ **ise** $\mathbf{g(m)}$ **kaçtır?**

a. $f(1) = |1 + 3| - 5 = |4| - 5 = -1$ bulunur.

b. $g(m) = (m)^3 + 3(m)^2 + (m) + 3 = m^3 + 3m^2 + m + 3$ bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen fonksiyonlar için istenilen değerleri bulunuz.

a. $f(x) = 5 - |x - 1|$ ise $f(-2)$ kaçtır?

b. $g(x) = (x - 2)^2 + 1$ ise $g(3)$ kaçtır?

6. Örnek

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = 3(x - 1) + 2$ fonksiyonu veriliyor.

0, 2, x + 2 ve f(2) girdi değerleri için f(x) fonksiyonunun alacağı çıktı değerlerini bulalım.

Her bir girdi değerini $f(x)$ te x yerine yazalım:

$f(x) = 3(x-1) + 2$ ise;

$f(0) = 3(0-1) + 2 = -1$,

$f(2) = 3(2-1) + 2 = 5$,

$f(x+2) = 3(x+2-1) + 2 = 3x + 5$ ve

$f[f(2)] = f(5) = 3(5-1) + 2 = 14$ bulunur.

Sıra Sizde

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = 2(x+1) - 3$ fonksiyonu veriliyor. -1, 1, $(x-1)$ ve $f(-1)$ girdiği değerleri için $f(x)$ fonksiyonunun alacağı çıktı değerlerini bulunuz.

7. Örnek

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = 2x + 1$ ve $g(x) = 5x - 3$ fonksiyonları veriliyor.

$f(3m) = g(2m)$ olduğuna göre m nin kaç olduğunu bulalım.

$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(3m) = 2.3m + 1 = 6m + 1$,

$g(x) = 5x - 3 \Rightarrow g(2m) = 5.2m - 3 = 10m - 3$ olur.

Şimdi m yi bulalım:

$$f(3m) = g(2m) \Rightarrow 6m + 1 = 10m - 3$$
$$\Rightarrow 4m = 4$$
$$\Rightarrow m = 1 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$\mathbb{R}$ de tanımlı $f_1(x) = x^2 - x + 4$ ve $f_2(x) = 4x^2 + 2x + 12$ dir. $f_1(2a) = f_2(a)$ ise a yı bulunuz.

8. Örnek

Aşağıda kuralı verilen fonksiyonların tanım kümesini bulalım.

a. $f_1(x) = \dfrac{x+1}{2x-2}$

b. $f_2(x) = \dfrac{3-x}{x^2+9}$

DİKKAT

Bu bölümde verilen bir f fonksiyonunun tanım kümesi belirtilmemişse tanım kümesi, $f(x) \in \mathbb{R}$ olacak şekilde tüm x gerçek sayılarının kümesi olarak alınacaktır.

a. Verilen ifadenin paydasını sıfır yapan tüm değerler fonksiyonu tanımsız yapacaktır.

O hâlde $2x - 2 = 0$ eşitliğini sağlayan tüm x değerleri tanım kümesinden çıkartılmalıdır.

$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ olduğundan $f_1(x)$ in tanım kümesi $\mathbb{R} - \{1\}$ dir.

b. Her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 9 > 0$ olduğundan $x^2 + 9 \neq 0$ dır.

Bu durumda paydayı sıfır yapan bir $x \in \mathbb{R}$ bulunamaz.

O hâlde $f_2(x)$ in tanım kümesi tüm gerçek sayılardır $(\mathbb{R})$.

DİKKAT

$\frac{a}{b}$ şeklindeki bir rasyonel ifadenin ancak $b \neq 0$ olduğunda tanımlı olacağını hatırlayınız.

Sıra Sizde

Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a. $f(x) = \dfrac{3 - x}{9 + x}$ **b.** $k(x) = \dfrac{1 - x}{x^2 + 1}$

9. Örnek

Aşağıda kuralı verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulalım.

a. $\mathbf{h(x) = \sqrt[3]{9 - x^2}}$ **b.** $\mathbf{k(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{4 - x}}}$

a. Tüm gerçek sayıların küpkökü tanımlı olduğundan $h(x)$ fonksiyonu $(9 - x^2) \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır.

O hâlde $h(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi tüm gerçek sayılardır $(\mathbb{R})$.

b. $k(x)$ fonksiyonunda yer alan karekökün tanımlı olabilmesi için içindeki ifade sıfır veya sıfırdan büyük olmalıdır. Yani,

$4 - x \geq 0$ **...(I)** olmalıdır.

Ayrıca verilen ifadenin paydası sıfır olamayacağından,

$\sqrt{4 - x} \neq 0 \Rightarrow 4 - x \neq 0$ **...(II)** olmalıdır.

I ve **II** den,

$4 - x > 0 \Rightarrow x < 4$ olur.

O hâlde $k(x)$ in tanım kümesi $(-\infty, 4)$ dır.

DİKKAT

$\sqrt[n]{a}$ şeklindeki bir ifadenin;

- n tek ise her $a \in \mathbb{R}$ için,
- n çift ise $a \geq 0$ için tanımlı

olduğunu hatırlayınız.

Sıra Sizde

Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a. $f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 81}$ **b.** $g(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x - 3}}$

Fonksiyon Türleri

Parçalı Fonksiyon	Tanım kümesinin farklı alt aralıklarında kuralı değişiklik gösteren fonksiyonlara **parçalı fonksiyon** denir. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve a bir gerçek sayı olmak üzere $x\in(-\infty, a)$ için $f(x) = g(x)$; $x\in[a, \infty)$ için de $f(x) = h(x)$ oluyorsa parçalı tanımlı verilen $f(x)$ fonksiyonu $f(x)=\begin{cases} g(x), & x < a \text{ ise} \\ h(x), & x \geq a \text{ ise} \end{cases}$ şeklinde gösterilir.

10. Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 3-x, & x<-1 \text{ ise} \\ x^2+5, & -1\leq x<1 \text{ ise} \\ 3x+1, & x\geq 1 \text{ ise} \end{cases}$ parçalı fonksiyonu için

$\dfrac{f(4)+f(-4)}{f(0)}$ ifadesinin değerini bulalım.

Verilen fonksiyonu şu şekilde de yazabiliriz:

$$\left.\begin{array}{lll} -\infty < x < -1 & \text{için} & f(x)=3-x \\ -1\leq x<1 & \text{için} & f(x)=x^2+5 \\ 1\leq x<\infty & \text{için} & f(x)=3x+1 \end{array}\right\} \text{dir.}$$

$4\geq 1$ olduğundan $f(4) = 3.4 + 1 = 13$,

$-4<-1$ olduğundan $f(-4) = 3 - (-4) = 7$ ve

$-1\leq 0<1$ olduğundan $f(0) = 0^2 + 5 = 5$ tir.

O hâlde $\dfrac{f(4)+f(-4)}{f(0)}=\dfrac{13+7}{5}=4$ bulunur.

Sıra Sizde

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 3-5x, & x<-2 \text{ ise} \\ 3, & -2\leq x\leq 5 \text{ ise} \\ x+2, & x>5 \text{ ise} \end{cases}$ parçalı fonksiyonuna göre

$f(8) - f(-3) + f(5)$ toplamını bulunuz.

Birim Fonksiyon	A boş kümeden farklı bir küme olmak üzere A dan A ya (A da) tanımlı, her elemanı kendine eşleyen fonksiyona **birim (özdeşlik) fonksiyon** denir. Birim fonksiyonu genel olarak $I: A\to A,\ I(x)=x$ veya $I: x\to x$ şeklinde gösterilir.

11. Örnek

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$ olmak üzere $f: A \to A$, $f(x) = x$ fonksiyonunu şema ile gösterelim.

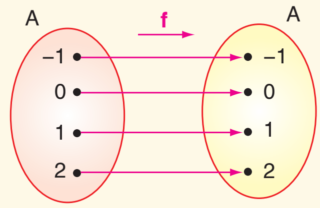
$f(x) = x$ kuralına göre fonksiyonun girdi ve çıktı değerleri yandaki tabloda gösterilmiştir.

Tablodaki verileri "9. Şekil" deki gibi şema ile gösterebiliriz.

$f(x)$ fonksiyonunun A kümesindeki her elemanı kendisine eşlediğine dikkat ediniz.

x	y
-1	$f(-1) = -1$
0	$f(0) = 0$
1	$f(1) = 1$
2	$f(2) = 2$

9. Şekil



Sıra Sizde

$A = \{-2, -1, 1, 2\}$ ve $f: A \to A$, $f(x) = -x$ fonksiyonunu şema ile gösterip fonksiyonun birim fonksiyon olup olmadığını açıklayınız.

12. Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

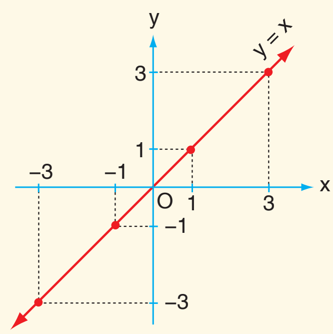
Tanım kümesindeki bazı değerler için $f(x)$ fonksiyonunun alacağı değerleri tablo ile gösterelim.

Bulduğumuz sıralı ikilileri koordinat sisteminde gösterip noktaları çizgi ile birleştirerek $f(x) = x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim (10. Şekil).

Denklemi $y = x$ olan doğru, özdeşlik (birim) fonksiyonunun grafiğidir.

x	y
-3	-3
-1	-1
1	1
3	3

10. Şekil



Sıra Sizde

$A = \{-2, 0, 2, 4\}$ ve $f: A \to A$, $f(x) = x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

13. Örnek

Tam sayılar kümesinde tanımlı $f(x) = (2a - 3)x + b + 2$ fonksiyonu birim fonksiyondur. Buna göre $a + b$ toplamını bulalım.

Birim fonksiyonunun kuralında x in katsayısı 1, sabit terimi ise 0 dır.

$f(x) = \underbrace{(2a - 3)}_{1}x + \underbrace{b + 2}_{0}$ olmalıdır.

Bu durumda $2a - 3 = 1 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$ ve
$b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$ dir.

O hâlde $a + b = 2 + (-2) = 0$ bulunur.

DİKKAT

$I(x) = x$ fonksiyonu

$I(x) = 1.x + 0$ şeklinde yazabileceğinden birim fonksiyonda x in katsayısı 1, sabit terim 0 dır.

Sıra Sizde

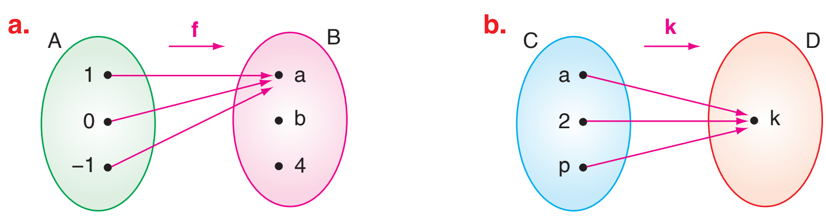
Reel sayılarda tanımlı $f(x) = 2x - mx + 4 - n$ fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre $m + n$ toplamını bulunuz.

Sabit Fonksiyon	$f: A \rightarrow B$ fonksiyonunda, A kümesinin bütün elemanları B kümesinin yalnız bir elemanı ile eşleniyorsa f fonksiyonuna **sabit fonksiyon** denir. Başka bir deyişle, her $x \in A$ için $f(x) = c \; (c \in B)$ ise f sabit fonksiyondur.

14. Örnek

Aşağıda şema ile gösterilen fonksiyonları inceleyelim.

11 . Şekil ***12 . Şekil***



f ve k fonksiyonlarının tanım kümelerindeki her eleman değer kümesindeki yalnız bir elemanla eşleşmiştir. Bu tür fonksiyonlara sabit fonksiyon denir.

Sıra Sizde

Aşağıdaki fonksiyonların türlerini belirtiniz.

a. $f = \{(1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$ **b.** $k = \{(-1, -1), (0, 0), (3, 3), (11, 11)\}$

15. Örnek

$f(x) = 4x + (m + 2)x + 3$ fonksiyonunun sabit fonksiyon olması için m nin değerini bulalım.

$f(x) = 4x + (m + 2)x + 3$ fonksiyonunun sabit fonksiyon olması için x li terim içermemelidir. Bu durumda $4x + (m + 2)x = 0 \Rightarrow m + 2 = -4$

$\Rightarrow m = -6$ bulunur.

Sıra Sizde

$f(x) = 3 - 4x + m - (m + 1)x$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre m sayısını bulunuz.

DİKKAT

$f(x) = a$ sabit fonksiyon ise $f(x) = 0.x + a$ şeklinde yazılabilir. O hâlde $f(x) = a$ sabit fonksiyonunda x in katsayısı 0, sabit terim a dır.

Doğrusal Fonksiyon	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ kuralı ile verilen fonksiyonlara **doğrusal fonksiyon** denir.

16. Örnek

Bisiklet belirli bir mucidi olmayan, zaman içerisinde bir çok çalışmanın sayesinde günümüze ulaşmış bir ulaşım, eğlence veya spor aracıdır.

Bir bisiklet sporcusu katılacağı bir yarış için gününün büyük bir çoğunluğunda azimli bir şekilde sabırla çalışmaktadır. Sporcu çalışmasını yaparken hızını sabit saatte 30 km de tutmaktadır.

Buna göre sporcunun zamana (x) göre aldığı yolu (y) veren $y = f(x)$ fonksiyonunun kuralını bulup fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Sporcunun zamana göre aldığı yolu aşağıdaki tablo ile gösterelim.

Zaman (saat) x	1	2	3	4
Yol (km) y	30	60	90	120

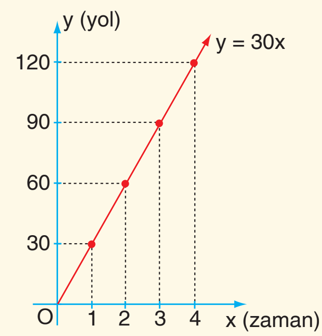
Alınan yol her defasında zamanın 30 katıdır.

O hâlde $y = f(x) = 30x$ bulunur.

Fonksiyonun zaman kümesi zaman negatif olamayacağından $[0, \infty)$, değer kümesi de aynı sebepten dolayı $[0, \infty)$ dır.

Bu fonksiyonun grafiği "13. Şekil" de gösterilmiştir.

13. Şekil



Sıra Sizde

Verilen örnekte bisikletlinin saatteki sabit hızının 10 km olduğunu düşünerek zamana (x) bağlı yol (y) fonksiyonu yazarak grafiğini çiziniz.

17. Örnek

Gerçek sayılarda tanımlı f doğrusal fonksiyonu için $f(1) = 4$ ve $f(2) = 7$ dir. Buna göre f fonksiyonunun kuralını bulup fonksiyonun grafiğini çizelim.

f doğrusal ise $f(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ dir.

$f(1) = 4 \Rightarrow a.1 + b = 4 \Rightarrow a + b = 4$ ...(**I**)

$f(2) = 7 \Rightarrow a.2 + b = 7 \Rightarrow 2a + b = 7$ ...(**II**)

I ve **II** eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak,

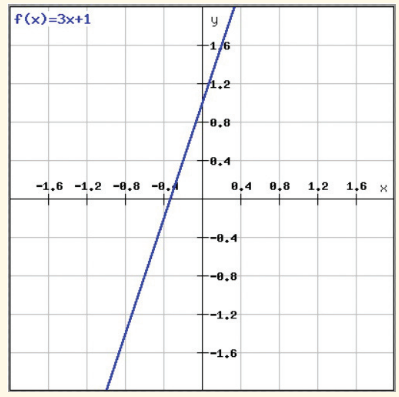
$$\begin{array}{rl} & a + b = 4 \\ + & -/\ 2a + b = 7 \\ \hline & -a = -3 \end{array}$$

$a = 3$ ve $b = 1$ bulunur. O hâlde $f(x) = 3x + 1$ dir.

Fonksiyonun grafiğini fonksiyon çizim aracında çizelim.

Çizim aracında kural bölümüne $y = 3x + 1$ yazıp onaylarsak "14. Şekil" deki grafiği elde ederiz.

14. Şekil



Sıra Sizde

Gerçek sayılarda tanımlı f doğrusal fonksiyonunda $f(-1) = 2$ ve $f(0) = 4$ tür. Buna göre fonksiyonun kuralını bulup grafiğini çiziniz.

Bire Bir, Örten ve İçine Fonksiyon

Uluslararası standart kitap numarasının İngilizce çevirisindeki kelimelerin baş harfleri olan ISBN, 1970'ten sonra basılmış her kitapta bulunan bir kimlik numarasıdır. 13 karakterden oluşan bu numarada yayının yapıldığı ülke, yayımcı, yayının numarası gibi kodlar bulunmaktadır.

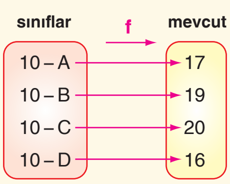
Sizce farklı iki kitaba ait ISBN numarası aynı olabilir mi?

Bire Bir Fonksiyon	$f: A \rightarrow B$ fonksiyonu her $x_1, x_2 \in A$ için, • $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ ya da • $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ oluyorsa f fonksiyonu **bire bir (1 – 1) fonksiyondur.**

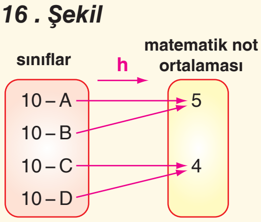
18. Örnek

"15 Şekil" de bir okuldaki sınıfları sınıf mevcutlarına eşleyen f fonksiyonu, "16. Şekil" de de bu sınıfların matematik dersindeki not ortalamalarını eşleyen h fonksiyonu verilmiştir. Buna göre f ve h fonksiyonlarını inceleyelim.

15 . Şekil



16 . Şekil



f fonksiyonuna göre mevcudu 19 olan sınıfın hangisi olduğu sorulduğunda tartışmasız herkesin 10 – B cevabını vereceği kesindir. Ancak h fonksiyonuna göre not ortalaması 5 olan sınıfın hangisi olduğu sorulduğunda 10 – A cevabını verenler olabileceği gibi 10 – B cevabını da alabiliriz.

f fonksiyonunda tanım kümesindeki her elemanın görüntüsü birbirinden farklı iken h fonksiyonda bu durum böyle değildir. Çünkü h fonksiyonunun bazı elemanlarının görüntüleri aynıdır.

O hâlde f fonksiyonu bire bir iken h fonksiyonu bire bir değildir.

Sıra Sizde

Bir arkadaş grubundaki yaşları farklı kişileri yaşlarına eşleyen fonksiyonun bire bir olup olmayacağını açıklayınız.

Örten Fonksiyon	• $f: A \rightarrow B$ fonksiyonunda her $y \in B$ için $f(x) = y$ olacak biçimde en az bir $x \in A$ varsa f fonksiyonu **örten fonksiyondur**, yani $f(A) = B$ ise f fonksiyonu örtendir.
İçine Fonksiyon	• $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu için $f(A) \neq B$ ise yani değer kümesinde eşlenmeyen en az bir eleman kalıyorsa f fonksiyonu **içine fonksiyondur.**

19. Örnek

“17. Şekil” ve “18. Şekil” de şema ile gösterilen f ve h fonksiyonlarını inceleyelim.

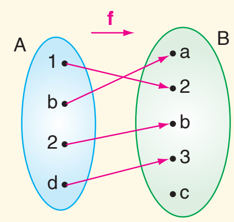
f fonksiyonunun değer kümesindeki c elemanı tanım kümesinden hiçbir elemanla eşleşmemiştir.

h fonksiyonunun değer kümesinde eşlenmeyen eleman yoktur.

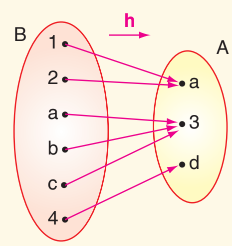
h fonksiyonunda olduğu gibi değer kümesinde eşlenmeyen eleman kalmayan fonksiyonlara örten fonksiyon denir.

f fonksiyonunda olduğu gibi değer kümesinde eşlenmeyen en az bir elemanı bulunan fonksiyonlara içine fonksiyon denir.

17 . Şekil



18 . Şekil

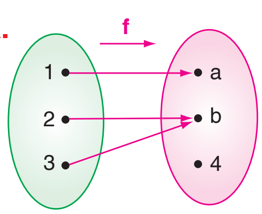


Sıra Sizde

Aşağıdaki şema ile gösterilmiş f, h ve k fonksiyonlarının bire bir, örten ya da içine olma durumlarını inceleyiniz.

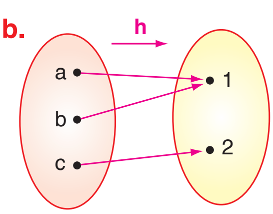
19 . Şekil

a.



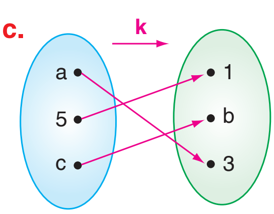
20 . Şekil

b.



21 . Şekil

c.



20. Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$ fonksiyonunun bire bir ve örtenlik durumlarını inceleyelim.

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $f(x_1) = f(x_2)$ olsun.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$ olur.

Her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ olduğundan f fonksiyonu bire bir dir.

$f(x) = y \Rightarrow x + 2 = y \Rightarrow x = y - 2$ olur.

Her $y \in \mathbb{R}$ için $y - 2 \in \mathbb{R}$ dir, yani y ye verilen her gerçek sayı değeri için en az bir $x \in \mathbb{R}$ vardır. O hâlde f fonksiyonu örtendir.

Sıra Sizde

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x$ fonksiyonunun bire bir ve örten olduğunu gösteriniz.

21. Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun bire bir ve örtenlik durumlarını inceleyelim.

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $f(x_1) = f(x_2)$ olsun.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2$ olur.

O hâlde f fonksiyonu bire bir değildir.

Örneğin $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ ve $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$ dir. 1 ve -1 in görüntüsü 2 olduğundan fonksiyon bire bir değildir.

$f(x) = y \Rightarrow x^2 + 1 = y \Rightarrow x^2 = y - 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$ olur.

$y - 1 < 0$ için $x \notin \mathbb{R}$ dir.

$y - 1 < 0 \Rightarrow y < 1$ olur.

$y < 1$ için $x \notin \mathbb{R}$ olduğundan değer kümesinin 1 den küçük elemanları açıkta kalır, yani f fonksiyonu içine fonksiyondur.

Fonksiyonun değer kümesini $[1, \infty)$ alırsak $f: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$ için f fonksiyonu örten olur.

Ayrıca $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow [1, \infty)$ ya da $f: \mathbb{R}^- \cup \{0\} \rightarrow [1, \infty)$ olması durumunda f fonksiyonu bire bir ve örten olur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki fonksiyonların bire bir ve örtenlik durumlarını inceleyiniz.

a. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ **b.** $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = 2x + 1$

c. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2 - 1$ **d.** $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$

Tek ve Çift Fonksiyonlar

Biyolojide simetri, bir organizmanın vücudunun bir düzlem ile ikiye ayrıldığında iki eş parça oluşma durumudur. Dış görünüşleri az da olsa simetrik yapı gösteren hayvanlara simetrik hayvanlar adı verilir. Hayvanların simetrik ya da asimetrik olma durumları biyolojide canlıların sınıflandırılmasında kullanılır. Sadece dış görünüşün esas alındığı sınıflandırmada düşey bir düzlemin iki eş parçaya ayırdığı yandaki görselde verilen kelebekler ile insanlar aynı sınıfta yer alırlar.

Tek ve Çift Fonksiyonlar	A simetrik bir küme olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için; • $f(-x) = f(x)$ ise f **çift fonksiyondur.** • $f(-x) = -f(x)$ ise f **tek fonksiyondur.**

22. Örnek

Gerçek sayılarda tanımlı aşağıdaki fonksiyonların tek ya da çift olup olmama durumlarını inceleyelim.

a. $f(x) = x^2 - 3$ **b.** $g(x) = x^3 + x$ **c.** $h(x) = x^2 + 2x - 1$

a. $f(x) = x^2 - 3$ fonksiyonu için,

$$\left.\begin{array}{l} f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 \\ f(x) = x^2 - 3 \end{array}\right\} f(-x) = f(x) \text{ olduğundan } f \text{ çift fonksiyondur.}$$

b. $g(x) = x^3 + x$ fonksiyonu için,

$$\left.\begin{array}{l} g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x \\ -g(x) = -(x^3 + x) = -x^3 - x \end{array}\right\} g(-x) = -g(x) \text{ olduğundan } g \text{ tek fonksiyondur.}$$

c. $h(x) = x^2 + 2x - 1$ fonksiyonu için,

$$\left.\begin{array}{l} h(-x) = (-x)^2 + 2(-x) - 1 = x^2 - 2x - 1 \\ -h(x) = -(x^2 + 2x - 1) = -x^2 - 2x + 1 \end{array}\right\} h(-x) \neq h(x) \text{ ve } h(-x) \neq -h(x)$$

olduğundan h tek ya da çift fonksiyon değildir.

DİKKAT

Bir fonksiyon, tek ya da çift olmak zorunda değildir. Bazı fonksiyonlar ne tek ne de çift fonksiyondur.

Sıra Sizde

Gerçek sayılarda tanımlı aşağıdaki fonksiyonların tek ya da çift olup olmama durumlarını inceleyiniz.

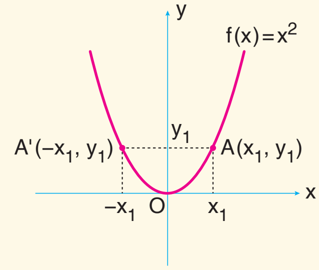
a. $f(x) = 2x^2 - 3x - 4$ **b.** $g(x) = 2x^3 - 4x$ **c.** $h(x) = x^4 + x^2 + 1$

Çift fonksiyonların grafikleri y eksenine göre simetriktir. Tek fonksiyonların grafikleri ise orijine göre simetriktir.

23. Örnek

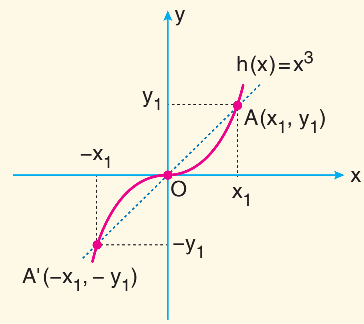
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği "22. Şekil" de ve $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiği de "23. Şekil" de verilmiştir. Buna göre fonksiyonların çift veya tek fonksiyon olup olmadıklarını inceleyelim.

22. Şekil



$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ olduğundan f fonksiyonu çift fonksiyondur. f fonksiyonunun "22. Şekil" de gösterilen grafiğinin üzerindeki her bir noktanın y eksenine göre simetriği yine grafik üzerindedir. Başka bir deyişle fonksiyonun grafiği y eksenine göre simetriktir.

23. Şekil



$h(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -h(x)$ olduğundan h fonksiyonu tek fonksiyondur. h fonksiyonunun "23. Şekil" de gösterilen grafiğinin üzerindeki her bir noktanın orijine göre simetriği yine grafik üzerindedir. Başka bir deyişle fonksiyonun grafiği orijine göre simetriktir.

Sıra Sizde

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = 3 - x$ fonksiyonunun grafiğini çizerek varsa simetrik olduğu nokta ya da ekseni açıklayınız.

Eşit Fonksiyonlar	Aynı tanım ve görüntü kümelerine sahip; tanım kümelerinin her bir elemanı için de aynı görüntüleri veren fonksiyonlara **eşit fonksiyonlar** denir.

24. Örnek

$A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ kümeleri ile $f : A \to B$, $f(x) = -x$ ve $h : A \to B$, $h(x) = -x^3$ fonksiyonları verilsin.

f ve g fonksiyonlarının görüntü kümelerini bularak iki fonksiyon arasındaki ilişkiyi bulalım.

$$\left.\begin{aligned} f(-1) &= 1 \\ f(0) &= 0 \\ f(1) &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, -1)\} \text{ dir.}$$

$$\left.\begin{aligned} h(-1) &= -(-1)^3 = 1 \\ h(0) &= -0^3 = 0 \\ h(1) &= -1^3 = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow h = \{(-1, 1), (0, 0), (1, -1)\} \text{ dir.}$$

Yukarıda görüldüğü gibi f ve h fonksiyonlarının tanım kümeleri $A = \{-1, 0, 1\}$, görüntü kümeleri $f(A) = h(A) = \{-1, 0, 1\}$ olup tanım kümesinin her bir elemanı için aynı değerleri almaktadırlar. O hâlde f ve h eşit fonksiyondur.

Sıra Sizde

$A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere A dan B ye tanımlı $f(x) = 2x + 1$ ve $h(x) = x^2 + 2$ fonksiyonunun eşit olup olmadığını inceleyiniz.

25. Örnek

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = (m + 2)x^2 + 3x + n - 4$ ve $h(x) = px + 3$ fonksiyonları veriliyor.

f = h olduğuna göre m + n + p değerini bulalım.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = h(x)$ ise $\underbrace{(m + 2)}_{0}x^2 + 3x + n - 4 = px + 3$ olmalıdır.

Bu eşitliğe göre $m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$ dir.

$p = 3$ tür.

$n - 4 = 3 \Rightarrow n = 7$ dir.

O hâlde $m + n + p = -2 + 7 + 3 = 8$ bulunur.

Sıra Sizde

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = x^3 + ax^3 - 4x + b + 2$ ile $h(x) = (c - 2)x + 5$ fonksiyonları eşittir. Buna göre $a + b + c$ kaçtır?

Fonksiyonlarda Dört İşlem

Bireyler, harcanabilir gelirlerini tasarruf etmek ya da tüketmek amacıyla kullanırlar. Bir ekonomik modelde, herhangi bir ülkenin tüketim harcamaları C TL ve tasarruf harcamaları da S TL olmak üzere,

$C = 0{,}015x^2 + 0{,}48x + 187{,}2$

$S = 0{,}007x^2 + 0{,}23x + 82{,}5$

biçiminde, x (*nüfus*) e bağlı olarak ifade edilmiştir. Tüketim ve tasarruf harcamalarının toplamı, bir ülkenin harcanabilir gelirini gösterir. Sizce harcanabilir geliri gösteren $D(x)$ fonksiyonu nasıl bulunabilir?

Fonksiyonlarda Dört İşlem	$f: A \to \mathbb{R},\ g: B \to \mathbb{R}$ ve $A \cap B \neq \varnothing$ olsun. • $(f+g): A \cap B \to \mathbb{R}$ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ • $(f-g): A \cap B \to \mathbb{R}$ $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ • $(f.g): A \cap B \to \mathbb{R}$ $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ • $\left(\frac{f}{g}\right): A \cap B \to \mathbb{R}$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad [g(x) \neq 0]$ • $(c.f)(x) = c.f(x)\ (c \in \mathbb{R})$ İki fonksiyonun toplam, fark, çarpım ve bölümlerinin tanım-kümesi, bu iki fonksiyonun tanım kümelerinin kesişimidir.

26. Örnek

Gerçek sayılarda tanımlı iki fonksiyon, $f(x) = 2 - x$ ve $g(x) = x^2 - 1$ olduğuna göre aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulalım.

a. $(f+g)(1)$ **b.** $(f-g)(0)$ **c.** $(f.g)(-2)$ **d.** $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$

f ve g fonksiyonlarının ikisi de $\mathbb{R}$ de tanımlı olduklarından f ve g fonksiyonlarıyla yapılan dört işlemin tanım kümesi de $\mathbb{R}$ olacaktır.

a. 1.Yol

f + g nin kuralını bulalım:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= 2 - x + x^2 - 1$$
$$= x^2 - x + 1$$

O hâlde $(f+g)(1) = 1 - 1 + 1$

$= 1$ bulunur.

2.Yol

Şimdi de f + g nin kuralını bulmadan $(f+g)(1)$ in değerini bulalım:

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1)$$
$$= (2-1) + (1^2 - 1)$$
$$= 1 + 0$$
$$= 1 \text{ bulunur.}$$

b. f – g nin kuralını bulalım:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$= 2 - x - (x^2 - 1)$$
$$= -x^2 - x + 3 \text{ olur.}$$

O hâlde $(f-g)(0) = -0 - 0 + 3$
$= 3$ bulunur.

c. f.g nin kuralını bulmadan $(f.g)(-2)$ yi bulalım:

$$(f.g)(-2) = f(-2).g(-2)$$
$$= (2-(-2)).((-2)^2-1)$$
$$= 4.3$$
$$= 12 \text{ bulunur.}$$

d. $\frac{f}{g}$ nin kuralını bulmadan $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$ i bulalım:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{f(-1)}{g(-1)}$$
$$= \frac{(2-(-1))}{(-1)^2-1}$$
$$= \frac{3}{0} \text{ bulunur.}$$

O hâlde $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$ tanımsızdır.

DİKKAT

Tanım kümelerinin ortak elemanları bulunmayan iki fonksiyon arasında dört işlem yapılamayacağına dikkat ediniz.

Sıra Sizde

Gerçek sayılarda tanımlı iki fonksiyon, $f(x) = x - 1$ ve $g(x) = x^2 + x + 1$ olduğuna göre aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a. $(f+g)(-1)$

b. $(f-g)(-2)$

c. $(f.g)(1)$

d. $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$

27. Örnek

f : A → B ve g : C → D şeklinde tanımlı f ve g fonksiyonları için,

$$f = \{(1,-1), (3,1), (2,-1), (4,0), (5,3)\} \text{ ve}$$
$$g = \{(-1,1), (-2,0), (2,4), (4,1)\}$$

olduğuna göre 2f + 3g fonksiyonunu bulalım.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C\{-2, -1, 2, 4\}$ olur. Bu durumda

$2f + 3g$ fonksiyonu $A \cap C = \{2, 4\}$ kümesinde tanımlıdır.

$x = 2$ için,

$2f(2) + 3g(2) = 2.(-1) + 3.4 = 10$ ve

$x = 4$ için,

$2f(4) + 3g(4) = 2.0 + 3.1 = 3$ olduğundan,

$2f + 3g = \{(2, 10), (4, 3)\}$ bulunur.

Sıra Sizde

$f: A \to B$ ve $g: C \to D$ şeklinde tanımlı f ve g fonksiyonları için,

$$f = \{(-1, 3), (0, 1), (2, -1), (3, 0)\} \text{ ve}$$

$$g = \{(-2, -1), (-1, 0), (2, -3), (4, 5), (5, 6)\}$$

olduğuna göre $3f - g$ fonksiyonunu bulunuz.

28. Örnek

Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için,

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ ve}$$

$$(2f + 3g)(x) = 2x^2 + 9x + 5$$

olduğuna göre $g(-1)$ değerini bulalım.

$(2f + 3g)(x) = 2x^2 + 9x + 5$

$2f(x) + 3g(x) = 2x^2 + 9x + 5$ olur.

Bu ifadede, $x = -1$ yazalım.

$$2f(-1) + 3g(-1) = 2.(-1)^2 + 9.(-1) + 5$$

$$2.[(-1)^2 + 1] + 3g(-1) = 2 - 9 + 5$$

$$4 + 3g(-1) = -2$$

$$g(-1) = -2 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için,

$$g(x) = x^2 - x - 1 \text{ ve}$$

$$(3f - 2g)(x) = x^2 - 5x + 2$$

olduğuna göre f(0) değerini bulunuz.

Fonksiyon Grafikleri

Bir ülkenin kalkınması için gerekli olan parasal kaynakların en önemlisini yurt içindeki tasarruflar oluşturmaktadır. Günümüzün önemli bir tasarruf aracı olan bireysel emeklilik sisteminde ülkemizdeki katılımcı sayısı teşvik sistemleriyle birlikte 7 milyona yaklaşmıştır.

Harcama davranışlarını kontrol edip vatandaşlık görevi olarak tasarruf etmeye karar veren biri, bireysel emeklilik sistemine girerken 2000 TL yatırıp her ay da 400 TL katkı payı ödeyeceğini bildirmiştir. Devletin bu hesap için ödenen aylık tutara bir yıl sonra başlamak üzere % 25 destek teşviği uygulayacağını düşünelim. Bu durumda kişinin geçen zamana göre hesabında birikecek paranın grafiği sizce nasıl çizilebilir? (33. örneğe bakınız.)

29. Örnek

$f(x) = x + 2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

$f(x) = x + 2$ doğrusal fonksiyonu $y = f(x)$ olduğundan $y = x + 2$ şeklinde yazıp farklı x değerleri için y nin alacağı değerleri bulalım.

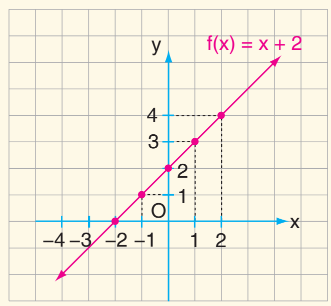
24. Şekil

x	y = x + 2	(x, y)
−2	y = −2 + 2 = 0	(−2, 0)
−1	y = −1 + 2 = 1	(−1, 1)
0	y = 0 + 2 = 2	(0, 2)
1	y = 1 + 2 = 3	(1, 3)
2	y = 2 + 2 = 4	(2, 4)

"24. Şekil" deki tabloda bulduğumuz noktaları koordinat sisteminde gösterelim.

O hâlde $f(x) = x + 2$ fonksiyonunun grafiği "25. Şekil" deki gibi çizilir.

25. Şekil



Sıra Sizde

$f(x) = 3 - x$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

DİKKAT

Farklı iki noktadan yalnız bir doğru geçer. Bu nedenle "25. Şekil" deki grafiği çizerken sadece iki nokta bularak da grafiği çizebiliriz.

30. Örnek

Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çizelim.

a. $f(x) = \dfrac{2x + 6}{3}$ **b.** $f(x) = -\dfrac{3x}{2}$

a. $f(x) = \dfrac{2x + 6}{3}$ fonksiyonunu sağlayan iki nokta belirleyelim.

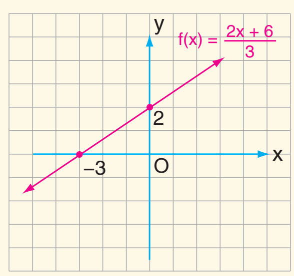
x	y
0	2
−3	0

$x = 0$ için $y = \dfrac{2.0 + 6}{3} = 2$,

$y = 0$ için $0 = \dfrac{2x + 6}{3} \Rightarrow x = -3$ tür.

O hâlde grafik "26. Şekil" deki gibi olur.

26. Şekil



b. $f(x) = -\dfrac{3x}{2}$ fonksiyonunu sağlayan iki nokta belirleyelim.

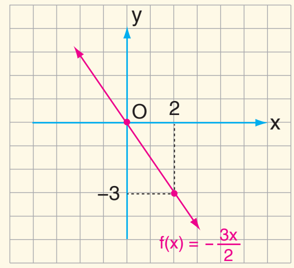
x	y
0	0
2	−3

$x = 0$ için $y = -\dfrac{3.0}{2} = 0$,

$y = -3$ için $-3 = -\dfrac{3x}{2} \Rightarrow x = 2$ dir.

O hâlde grafik "27. Şekil" deki gibi olur.

27. Şekil



Sıra Sizde

Aşağıdaki doğrusal fonksiyonların x ve y eksenlerini kestikleri noktaları belirledikten sonra grafiklerini çiziniz.

a. $f(x) = -2x + 6$ **b.** $f(x) = 4x + 8$

DİKKAT

$y = f(x)$ fonksiyonunda x yerine 0 yazarak fonksiyonun grafiğinin y eksenini kestiği noktayı; y yerine 0 yazarak da grafiğin x eksenini kestiği nokta bulunur.

Parçalı Fonksiyonların Grafikleri

31. Örnek

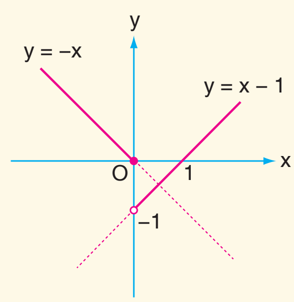
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \text{ ise} \\ x-1, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$ **fonksiyonunun grafiğini çizelim.**

$x \leq 0$ için $f(x) = -x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. $x = 0$ için $f(0) = -0 = 0$ olduğundan $(0, 0)$ noktasına içi dolu yuvarlak koyalım.

$x > 0$ için $f(x) = x - 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. $x = 0$ fonksiyonun bu kısmına dâhil olmadığından $(0, -1)$ noktasına içi boş yuvarlak koyalım.

"28. Şekil" de kırmızı düz çizgilerle çizilen grafik, f nin grafiğidir.

28. Şekil



Sıra Sizde

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq -1 \text{ ise} \\ x+2, & x > -1 \text{ ise} \end{cases}$$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

32. Örnek

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \text{ ise} \\ x, & 0 \leq x < 2 \text{ ise} \\ 2-x, & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$ **fonksiyonunun grafiğini çizelim.**

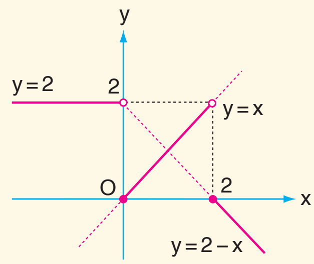
Önce $x < 0$ için $f(x) = 2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. $(0, 2)$ noktası grafiğe dâhil olmadığından bu noktaya içi boş yuvarlak koyalım.

Şimdi $0 \leq x < 2$ için $f(x) = x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. $x = 0$ için $f(x) = x$ ve $f(0) = 0$ olduğundan $(0, 0)$ noktasına içi dolu yuvarlak koyalım. $x = 2$ fonksiyonun bu kısmına dâhil olmadığından $(2, 2)$ noktasına içi boş yuvarlak koyalım.

Şimdi de $x \geq 2$ için $f(x) = 2 - x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. $x = 2$ için $f(x) = 2 - x$ ve $f(2) = 2 - 2 = 0$ olduğundan $(2, 0)$ noktasına içi dolu yuvarlak koyalım.

O hâlde $f(x)$ fonksiyonunun grafiği "29. Şekil" de kırmızı düz çizgilerle çizilen grafiktir.

29. Şekil



Sıra Sizde

$$f(x) = \begin{cases} -2x & , \quad x < -2 \text{ ise} \\ 4 & , \quad -2 \leq x < 2 \text{ ise} \\ x + 2 & , \quad x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

33. Örnek

Konunun girişinde verilen problemi fonksiyon şeklinde ifade edip grafiğini çizelim.

Bireysel emeklilik sistemine girişte yatırılan 2000 TL ve aylık olarak ödenecek 400 TL için x ay olmak üzere biriken parayı (y) tabloda gösterelim.

x (ay)	1	2	3	...	x
y (para TL)	2000 + 400	2000 + 2.400	2000+3.400	...	2000+400x

Bu durumda ilk bir yıl için biriken para $f(x) = 400x + 2000$ dir.

Bir yıldan sonra ödenecek her 400 TL için % 25 destek uygulanacağından hesaba aylık 500 TL para girişi olacaktır.

Bir yıl sonunda hesapta birikmiş para $f(12) = 400 . 12 + 2000 = 6800$ TL dir.

Bu paranın üzerine 13. aydan itibaren her ay 500 TL yatırılırsa biriken paranın fonksiyonu,

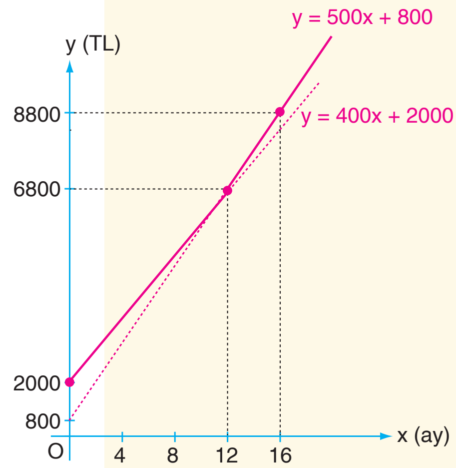
x (ay)	13	14	...	x
y (para TL)	6800+(13−12).500	6800+(14−12).500	...	6800+(x−12).500

$x > 12$ olmak üzere, $f(x) = 6800 + (x - 12) . 500 = 6800 + 500x - 6000$
$= 500x + 800$ dir.

Bu iki fonksiyonu $f(x)=\begin{cases} 400x+2000 & , \quad 0 \leq x \leq 12 \text{ ise} \\ 500x+800 & , \quad x > 12 \text{ ise} \end{cases}$ şeklinde gösterebiliriz.

Bu durumda grafik "30. Şekil"deki gibidir.

30. Şekil



Sıra Sizde

Harçlıklarından arttırdığı parayı günlük olarak kumbaraya atacak olan Ali Kerem, ilk hafta günde 5 TL, ikinci hafta da günde 10 TL para biriktiriyor. Buna göre kumbarada biriken paranın fonksiyonunu yazıp grafiğini çiziniz.

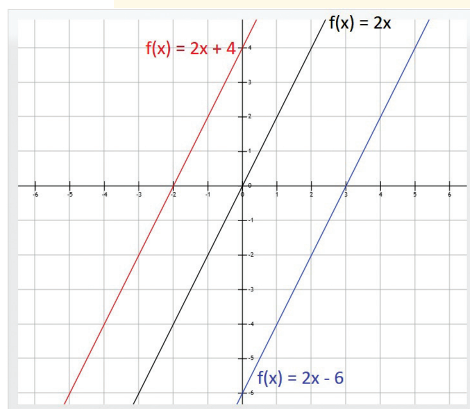
34. Örnek

Aşağıda verilen $f(x) = ax + b$ şeklindeki fonksiyonların grafiklerini çizim programı kullanarak çizip a ve b katsayılarının grafikleri nasıl etkilediğini inceleyelim.

a. Grafik çizim programında çizdiğimiz $f(x) = 2x$, $f(x) = 2x + 4$ ve $f(x) = 2x - 6$ fonksiyonlarının grafikleri "31. Şekil"deki gibidir.

"31. Şekil"den de görüldüğü gibi $f(x) = ax + b$ şeklindeki fonksiyonların sabit sayısı büyüdükçe grafik yukarı, küçüldükçe de aşağı kaymaktadır.

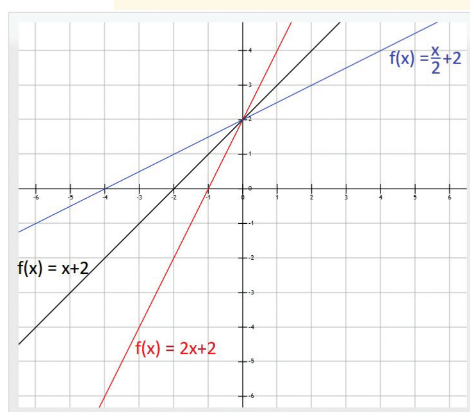
31. Şekil



b. Grafik çizim programında çizdiğimiz $f(x) = x + 2$, $f(x) = 2x + 2$ ve $f(x)=\frac{x}{2}+2$ fonksiyonlarının grafikleri "32. Şekil"deki gibidir.

"32. Şekil"den de görüldüğü gibi $f(x) = ax + b$ şeklindeki fonksiyonlarda pozitif a sayısı küçüldükçe grafik daha yatık, büyüdükçe grafik daha dikey hâle gelmektedir.

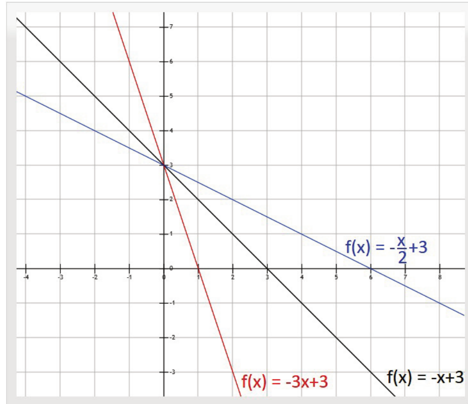
32. Şekil



c. Grafik çizim programında çizdiğimiz $f(x) = -x + 3$, $f(x) = -3x + 3$ ve $f(x) = -\frac{x}{2} + 3$ fonksiyonlarının grafikleri "33. Şekil"deki gibidir.

"33. Şekil"den de görüldüğü gibi $f(x) = ax + b$ şeklindeki fonksiyonlarda negatif a sayısı küçüldükçe grafik daha dikey, büyüdükçe grafik daha yatık hâle gelmektedir.

33. Şekil



Yukarıdaki çizimlerden,

- $f(x) = ax + b$ şeklindeki fonksiyonlarda sabit terimin değişmesi grafiğin yatıklığını değiştirmezken sadece yerini değiştirmektedir.
- $f(x) = ax + b$ şeklindeki fonksiyonlarda x değişkeninin katsayısı olan a pozitif olduğunda grafik sağa yatık, negatif olduğunda da sola yatık olduğu sonucunu; a katsayısının mutlak değer bakımından büyüdükçe de grafiğin daha dikey olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

Sıra Sizde

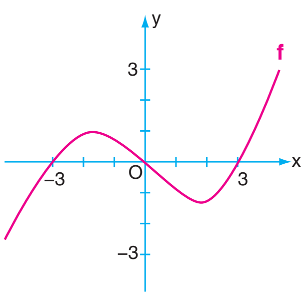
$f(x) = x + 3$, $f(x) = 2x + 6$ ve $f(x) = -3x - 9$ un

grafiklerini çizerek bu grafiklerin a ve b katsayılarıyla olan ilişkisini inceleyiniz.

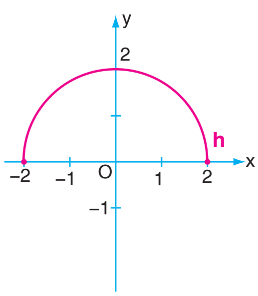
35. Örnek

Grafiği verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulalım.

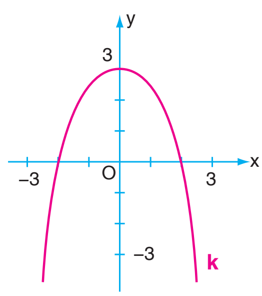
a. ***34. Şekil***



b. ***35. Şekil***



c. ***36. Şekil***



a. f fonksiyonunun grafiğinde x değerleri $(-\infty, \infty)$ aralığında, y değerleri de $(-\infty, \infty)$ aralığında değişmektedir. Bu durumda f fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümeside $\mathbb{R}$ dır.

Benzer şekilde;

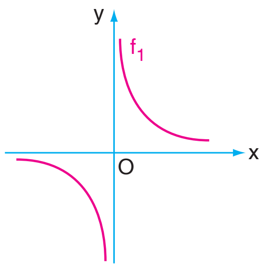
b. h fonksiyonunun tanım kümesi $[-2, 2]$, görüntü kümesi $[0, 2]$,

c. k fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi $(-\infty, 3]$ aralığıdır.

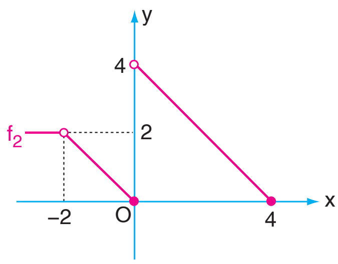
Sıra Sizde

Aşağıda grafikleri verilen f_1, f_2 ve f_3 fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümelerini belirleyiniz.

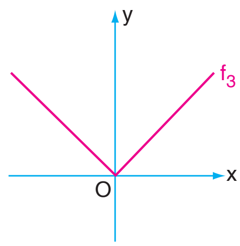
a. *37. Şekil*



b. *38. Şekil*



c. *39. Şekil*



36. Örnek

Ülkemizde yaşayan en büyük kuş türü olan toy, aynı zamanda dünyada uçabilen en büyük türdür. Avlanmaları ve yaşam alanlarının hızla yok edilmesi nedeniyle nesli tükenme tehlikesiyle karşı karşıya olan toy kuşlarının kütlesi 18 kg a kadar ulaşabilmektedir.

Bu kuşların neslinin devam etmesi için gönüllü olarak mücadele eden biyologun çiftliğinde bulunan toy sayılarının yıllara göre değişimi "40. Şekil" deki tabloda gösterilmiştir. Buna göre,

a. Tablodaki bilgileri sıralı ikililerin kümesi şeklinde ifade edelim.

b. Bu ilişkinin grafiğini çizelim ve bir fonksiyon belirtip belirtmediğini açıklayalım.

40. Şekil

Yıllar	Üreyen Kuş Sayısı
2010	4
2011	8
2012	10
2013	17
2014	20
2015	25
2016	30
2017	32

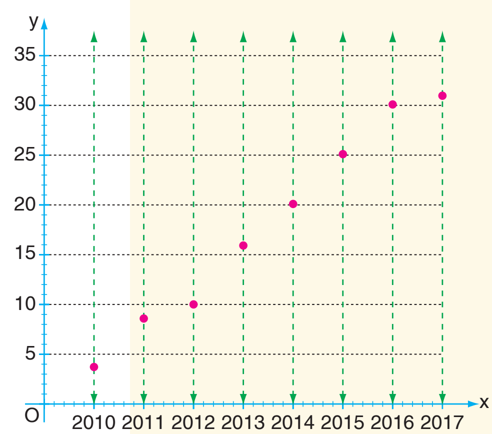
a. Sıralı ikililerin birinci bileşenleri yılları, ikinci bileşenleri de üreyen kuş sayısını göstersin. Buna göre tablodaki verileri aşağıdaki gibi sıralı ikililerin kümesi şeklinde yazabiliriz:

$f = \{(2010, 4), (2011, 8), (2012, 10), (2013, 17), (2014, 20),$
$(2015, 25), (2016, 30), (2017, 32)\}$

b. Şimdi de f ile isimlendirdiğimiz matematiksel ilişkiyi grafik ile gösterelim. Bunun için f nin elemanı olan her bir sıralı ikiliyi koordinat sisteminde göstermeliyiz.

f ilişkisinin tanım kümesindeki elemanlardan "41. Şekil" deki grafiğine düşey doğrular çizilirse (yeşil kesik çizgi ile gösterilen doğrular) her bir dikey doğru, grafiği yalnızca bir noktada keser. Yani, f yi oluşturan sıralı ikililerin birinci bileşenleri birbirinden farklıdır. Bu durum bize, f nin tanım kümesindeki her bir elemanın yalnız bir elemanla eşlendiğini gösterir. O hâlde f bir fonksiyon belirtir.

41. Şekil



Burada olduğu gibi dikey doğruları kullanarak verilen bir sıralı ikililer kümesinin fonksiyon olup olmadığını belirleme işlemine **dikey (düşey) doğru testi** denir.

Sıra Sizde

Bir hava tahmin uygulamasının bir haftalık sürede bir yerleşim yerindeki sıcaklık ve hissedilen sıcaklık verileri "42. Şekil"deki tabloda verilmiştir.

a. Tablodaki verileri birinci bileşenleri sıcaklığı, ikinci bileşenleri de hissedilen sıcaklığı gösterecek sıralı ikililerin kümesi şeklinde yazınız.

b. Bu ilişkinin grafiğini çiziniz ve grafiğin bir fonksiyona ait olup olmadığını açıklayınız.

42. Şekil

Sıcaklık (°C)	Hissedilen Sıcaklık (°C)
10	8
11	9
10	11
12	12
13	14
14	15
12	14

Düşey Doğru Testi	f: A → B bir fonksiyon olsun. Her $a \in A$ için denklemi $x = a$ olan doğrular, f nin grafiğini bir ve en çok bir noktada kesiyorsa grafik bir fonksiyon grafiğidir.

37. Örnek

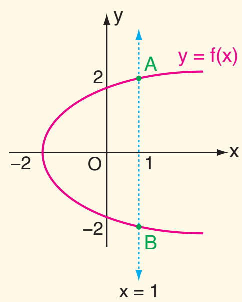
"43. Şekil" ve "44. Şekil"de sırasıyla $y = f(x)$ ve $y = h(x)$ grafiği verilmiştir.

f ve h nin fonksiyon olup olmadığını belirleyelim.

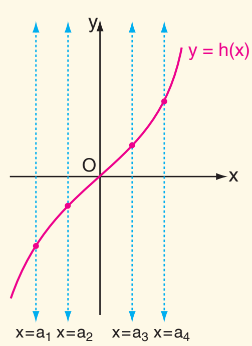
$y = f(x)$ in tanım kümesi $[-2, \infty)$, görüntü kümesi de $(-\infty, \infty)$ aralığıdır. "43. Şekilde"den de görüldüğü gibi $x \in [-2, \infty)$ için denklemi $x = 1$ olan doğru $y = f(x)$ in grafiğini A ve B gibi iki noktada kestiğinden $y = f(x)$ bir fonksiyon değildir.

$y = h(x)$ in tanım kümesi de görüntü kümesi de $\mathbb{R}$ dır. "44. Şekil"den de görüleceği gibi $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere denklemi $x = a$ olan her doğru, $y = h(x)$ in grafiğini keser ve bu kesim noktası yalnız bir tanedir. Bu nedenle $y = h(x)$ bir fonksiyondur.

43. Şekil



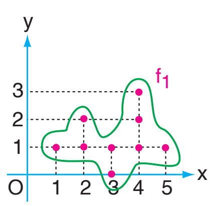
44. Şekil



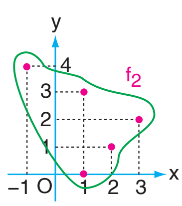
Sıra Sizde

Aşağıda grafiklerin bir fonksiyona ait olup olmadıklarını belirleyiniz.

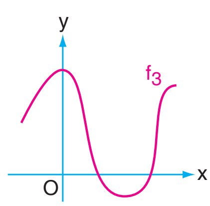
a. *45. Şekil*



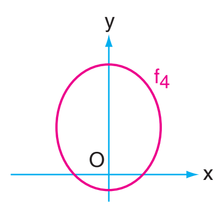
b. *46. Şekil*



c. *47. Şekil*

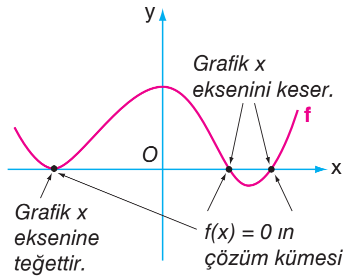


d. *48. Şekil*



49. Şekil

Bir f fonksiyonunun grafiği $y = f(x)$ denkleminin grafiğidir ve grafiğin (varsa) x eksenine teğet olduğu veya x eksenini kestiği noktalar $f(x) = 0$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesidir.



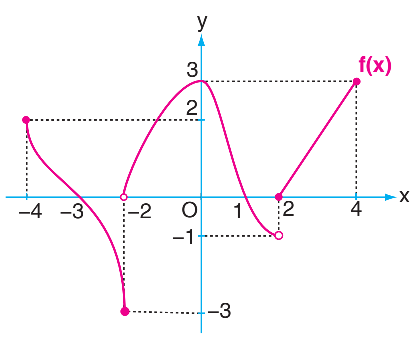
38. Örnek

50. Şekil

"50. Şekil" deki $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre;

a. $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$ ve $f(2)$ **değerlerini bulalım.**

b. $f(m) = 0$ **ise m nin alacağı değerleri bulalım.**



a. $x = -4$ için $y = 2$ olduğundan $f(-4) = 2$ dir.

$x = -3$ için $y = 0$ olduğundan $f(-3) = 0$ dır.

$x = -2$ için $y = -3$ olduğundan $f(-2) = -3$ tür.

$x = 0$ için $y = 3$ olduğundan $f(0) = 3$ tür.

$x = 2$ için $y = 0$ olduğundan $f(2) = 0$ dır.

b. Görüntüsü 0 olan noktalar -3, 1 ve 2 *[$f(-3) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$]* dir.

Buna göre m nin alabileceği değerlerin kümesi $\{-3, 1, 2\}$ dir.

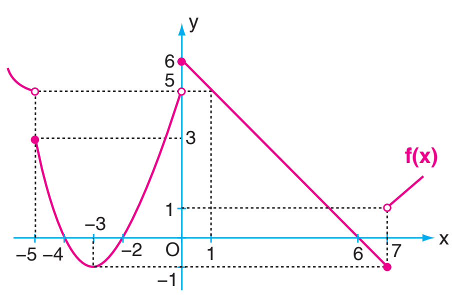
Sıra Sizde

51. Şekil

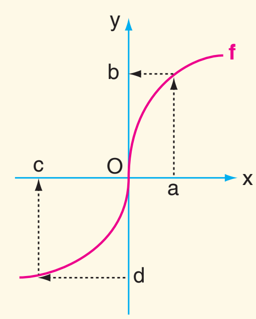
"51. Şekil" deki grafik $f(x)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre,

a. $f(-5)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$ ve $f(1)$ değerlerini bulalım.

b. $f(a) = 0$ olan kaç tane $a \in \mathbb{R}$ sayısı vardır?



DİKKAT



$x = a$ için $y = b$ olduğundan, $(a, b) \in f$ veya $f(a) = b$ olup a nın görüntüsü b dir.

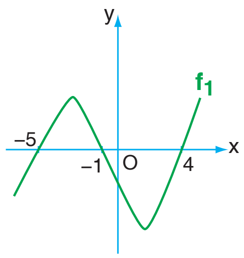
$y = d$ için $x = c$ olduğundan, $(c, d) \in f$ veya $f(c) = d$ olup d nin ters görüntüsü c dir.

39. Örnek

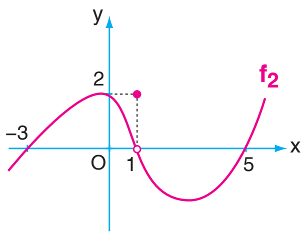
Aşağıda $f_1(x)$, $f_2(x)$ ve $f_3(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Sırasıyla $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ ve $f_3(x) = 0$ denklemlerinin gerçek sayılardaki çözüm kümelerini bulalım.

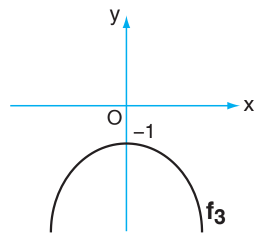
a. *52. Şekil*



b. *53. Şekil*



c. *54. Şekil*



a. $f_1(x)$ fonksiyonunun grafiği x eksenini $(-5, 0)$, $(-1, 0)$ ve $(4, 0)$ noktalarında keser. O hâlde $f_1(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\{-5, -1, 4\}$ tür.

b. $f_2(x)$ fonksiyonunun grafiği x eksenini $(-3, 0)$ ve $(5, 0)$ noktalarında keser. *(Fonksiyon üzerindeki apsisi 1 olan noktanın görüntüsünün 2 olduğuna dikkat ediniz.)*

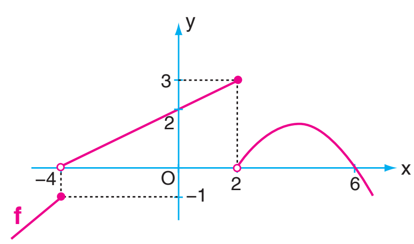
O hâlde $f_2(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\{-3, 5\}$ tir.

c. $f_3(x)$ fonksiyonunun grafiği x eksenini kesmez veya x eksenine teğet değildir. O hâlde $f_3(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\varnothing$ dir.

Sıra Sizde

"55. Şekil"de verilen f fonksiyonunun grafiğine göre $f(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesinde kaç eleman vardır?

55. Şekil



40. Örnek

"56. Şekil"deki tablo, farklı yaşlardaki sağlıklı bireylerin egzersiz yaparken birer dakikalık zaman aralıklarındaki kalp atış sayısının olması gereken maksimum değerini göstermektedir.

Tablo ile ifade edilen doğrusal fonksiyonun grafiğini çizelim.

56. Şekil

Yaş, x	Kalp Atış Sayısı, y
20	50
30	47,5
40	45
50	42,5
60	40

Tablodan $f(x) = ax + b$ doğrusal fonksiyonunda sağlatacağımız, $(20, 50)$ ve $(60, 40)$ noktalarını seçelim.

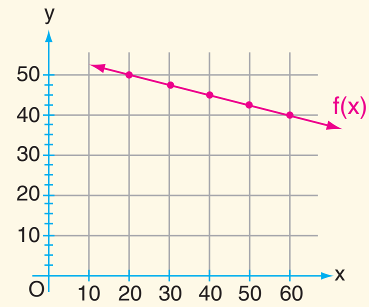
$(20, 50)$ noktası için $f(20) = 20 . a + b = 50$ ... (**I**)

$(60, 40)$ noktası için $f(60) = 60 . a + b = 40$ ... (**II**)

I ve **II** denklemi taraf tarafa çözersek $a = -\frac{1}{4}$ ve $b = 55$ bulunur.

Bu durumda $f(x) = -\frac{x}{4} + 55$ olup grafiği "57. Şekil"deki gibidir.

57. Şekil



Sıra Sizde

"58. Şekil"deki tablo ile verilen doğrusal fonksiyonun grafiğini çiziniz.

58. Şekil

x	y = f(x)
−4	5
−2	3
0	1
1	0
3	−2

41. Örnek

x ay türünden zamanı, y de TL türünden maliyeti göstermek üzere f ve h fonksiyonları $f(x) = 500x + 3000$ ve $h(x) = 1250x$ şeklinde veriliyor. Buna göre,

a. Maliyetlerin kaçıncı ayda eşit olacağını bulalım.

b. Fonksiyonların grafiklerini aynı koordinat sisteminde çizelim.

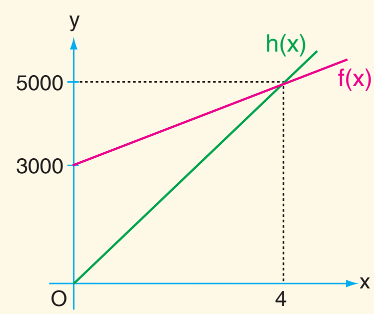
a. $y = f(x)$ ve $y = h(x)$ olduğundan iki fonksiyonun kurallarını eşitlersek maliyetlerin kaçıncı ayda eşitleneceğini bulabiliriz. Buna göre,

$f(x) = h(x) \Rightarrow 500x + 3000 = 1250x \Rightarrow 3000 = 750x \Rightarrow x = 4$ ay sonra maliyetler eşitlenecektir.

b. x ay türünden zamanı gösterdiğinden negatif olamaz. Bu durumda fonksiyon grafiklerini x in negatif olmayan tarafında çizeceğiz. O hâlde f ve h fonksiyonlarının grafikleri "59. Şekil"deki gibidir.

f ve h fonksiyonlarının grafiklerinin maliyetlerin eşitlendiği 4. ayda kesiştiğine dikkat ediniz.

59. Şekil



Sıra Sizde

Bir aracın zamana (x) bağlı aldığı yol (y) denklemi f, kalan yol denklemi de k fonksiyonlarıyla ifade edilmektedir. $0 \leq x \leq 4$ in $f(x) = 50x$ ve $k(x) = 200 - 50x$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat sisteminde çiziniz.

Aracın kaçıncı saatte yolun ortasında olacağını bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. $A = \{-1, 0, 1\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ kümeleri için A dan B ye tanımlı aşağıdaki ilişkilerden hangileri bir fonksiyondur?

a. $f = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$

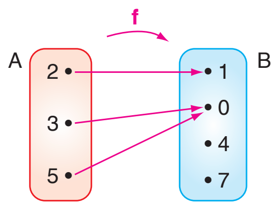
b. $k = \{(-1, 3), (0, 3), (1, 3)\}$

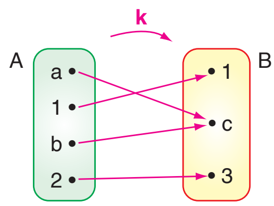
c. $h = \{(-1, 1), (1, 2), (0, 2)\}$

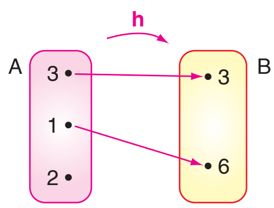
d. $p = \{(0, 1), (1, 3), (-1, 1), (0, 2)\}$

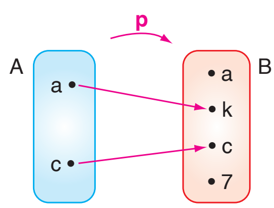
e. $g = \{(0, 2), (1, 3)\}$

2. Aşağıda şema ile gösterilen ilişkilerden hangileri bir fonksiyondur?

a.


b.


c.


d.


3. Tanım kümesi $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ olan bir f fonksiyonunun kuralı $f(x) = 1 - x^2$ dir. Buna göre,

a. f fonksiyonunu sıralı ikililer şeklinde yazınız.

b. $f(A)$ görüntü kümesini yazınız.

4. $f = \{(1, 3), (2, 3), (a, 1), (c, 2), (d, -1)\}$ ifadesi bir fonksiyon belirtmektedir. Buna göre,

a. Fonksiyonun tanım kümesini yazınız.

b. Fonksiyonun görüntü kümesini yazınız.

5. Tanım kümesi A, görüntü kümesi de B olan aşağıdaki fonksiyonlar için $B = \{-1, 3, 4\}$ olduğuna göre her bir fonksiyon için A kümesini bulunuz.

a. $f(x) = x + 2$

b. $k(x) = \dfrac{x+1}{3}$

c. $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$

d. $p(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

6. "60. Şekil"deki tablo bir okulun kantininde bulunan otomatik kahve makinesine ait kontrol panelindeki tuşlar ve alınabilecek 3 çeşit kahveyi göstermektedir. Buna göre,

a. "60. Şekil"deki tabloda tuşlar $\{A, B, C, D, E\}$ kahve türleri kümesine $\{F, S, T\}$ verilen ilişkiyi sıralı ikililer şeklinde yazınız. Yazdığınız ilişkinin bir fonksiyona ait olup olmadığını nedenleriyle açıklayınız.

b. Yukarıda yazdığınız ilişkinin bir fonksiyon olabilmesi için makineye ne yapılabilir?

60. Şekil

Tuş	Kahve türü
A	Filtre kahve (F)
B	Sütlü kahve (S)
C	Sütlü kahve (S)
D	Türk kahvesi (T)
E	

7. Aşağıdaki fonksiyonların her biri için $f(-1)$, $f(0)$ ve $f(2)$ değerlerini bulunuz.

a. $f(x) = x^2 + 1$ b. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ c. $f(x) = \sqrt{x+5}$

d. $f(x) = |3 - x| - 1$ e. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & , \quad x < 0 \text{ ise} \\ 5 & , \quad 0 \le x < 1 \text{ ise} \\ x^2 & , \quad x \ge 1 \text{ ise} \end{cases}$

8. Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = 2x - 1$ ve $h(x) = 4 - 3x$ fonksiyonları için,

a. $f(a) = h(a)$ ise a kaçtır?

b. $f(2b) = h(-b)$ ise b kaçtır?

9. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a. $f(x) = \sqrt{x-1}$ b. $k(x) = \dfrac{-3}{x+2}$

c. $h(x) = 2x - 5$ d. $p(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}}$

10. Aşağıdaki f fonksiyonları birim fonksiyonlardır. Buna göre her bir seçenekteki m ve n sayılarını bulunuz.

a. $f(x) = (m+1).x^2 + (n-1)x$ b. $f(x) = (2m+1)x - (n-3)$

c. $f(x) = (mn+3)x + m + 2$

11. Aşağıdaki g fonksiyonları sabit fonksiyonlardır. Buna göre her bir seçenekteki $g(m)$ değerlerini bulunuz.

a. $g(x) = (m+2)x + m + 1$ b. $g(x) = 4x - (m+1)x - m$

c. $g(x) = (m+3)x + 5$

12. Birikmiş 100 TL parasından her gün 5 TL para harcayan Bülent'in günlere (x) göre kalan parasını (y) veren $y = f(x)$ fonksiyonunu bulup tanım ve görüntü kümelerini belirleyip grafiğini çiziniz.

13. Dikildiğinde 20 cm boyunda olan bir fidan her ay 2 cm uzamaktadır. Fidanın aylara (x) göre boyunu (y) veren $y = f(x)$ fonksiyonunu bulup tanım ve görüntü kümelerini belirtip grafiğini çiziniz.

14. $f(x)$ doğrusal fonksiyonunda $f(2) = 5$ ve $f(-1) = -1$ olduğuna göre $f(5)$ kaçtır?

15. Aşağıdaki fonksiyonlardan her birinin bire bir ve örtenlik durumlarını inceleyiniz.

a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 1$

b. $k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ k(x) = \frac{x+1}{2}$

c. $h : \mathbb{Z}^- \to \mathbb{Z}^+,\ h(x) = x^2$

16. Aşağıda fonksiyonların teklik çiftlik durumlarını inceleyiniz.

a. $f(x) = 3x^2 + 2x$

b. $k(x) = 4x - 2$

c. $h(x) = 5$

d. $p(x) = x^2 + 1$

17. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (2a-4)x^3 + (b+4)x^2 + (4b-8)x - 3a - b + 1$ fonksiyonu çift fonksiyondur. Buna göre $f(1)$ in değerini bulunuz.

18. $f(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonları sırasıyla çift ve tek fonksiyonlardır. Buna göre aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

a. ☐ $f(x).h(x)$ fonksiyonu çifttir.

b. ☐ $f(x) + h(x)$ fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetriktir.

c. ☐ $2h(x)$ fonksiyonunun grafiği orijine göre simetriktir.

d. ☐ $f(x^2)$ fonksiyonu çift fonksiyondur.

19. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, -2, -3, -4\}$ olmak üzere $f : A \to B$, $g : A \to B$,

$f:\{(1, -3), (2, -1), (3, -4), (4, -2)\}$ ve

$g:\{(1, -2), (2, -4), (3, -1), (4, -3)\}$ olduğuna göre aşağıda istenen fonksiyonları sıralı ikililerin kümesi şeklinde yazınız.

a. $2f$

b. $f + g$

c. $2f - 3g$

d. $f.g$

e. $\frac{f}{g}$

20. Gerçek sayılarda tanımlı f ve h fonksiyonları için,

$f(x) = -x + 5$ ve

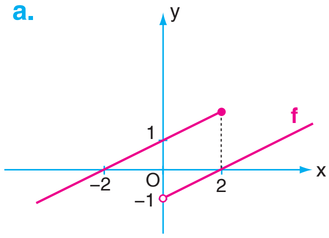
$(3h - f)(x) = 10x - 2$

olduğuna göre $h(3)$ aşağıdakilerden hangisidir?

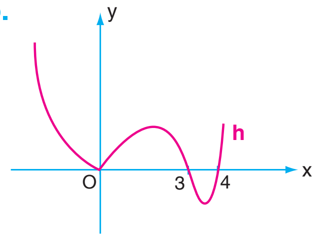
A) 2 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

21. Aşağıda verilen $y = f(x)$ ve $y = h(x)$ ilişkilerinin grafiklerine bakarak hangisi ya da hangilerinin fonksiyon olduğunu tespit ediniz.

a.

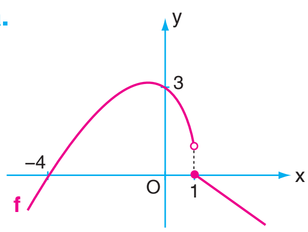


b.

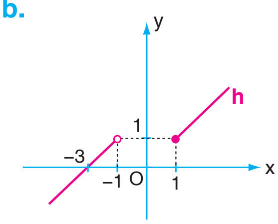


22. Aşağıda verilen fonksiyon grafiklerine bakarak fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

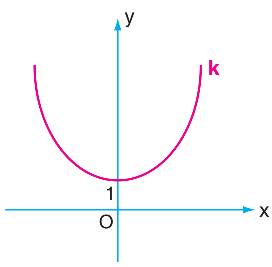
a.



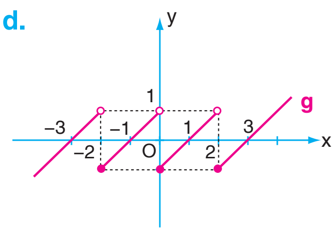
b.



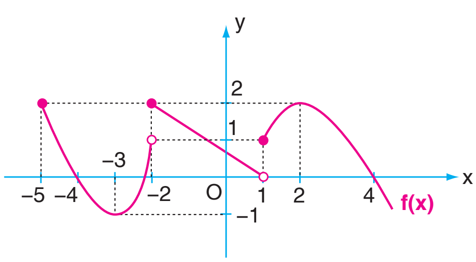
c.



d.



23.



Yukarıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre,

a. $f(-5)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(1)$ ve $f(4)$ değerlerini bulunuz.

b. $f(a) = 0$ olmasını sağlayan kaç $a \in \mathbb{R}$ sayısı vardır?

İKİ FONKSİYONUN BİLEŞKESİ VE BİR FONKSİYONUN TERSİ

BÖLÜM 2.2

İki Fonksiyonun Bileşkesi

Bir süt fabrikasında kullanılan iki makineden birincisi süt şişelerine sütü doldurmak için ikincisi ise şişelerin kapaklarını monte etmek için kullanılırken fabrikaya daha teknolojik olan üçüncü bir makine alınıyor. Bu makine hem süt şişelerine sütü dolduruyor hem de şişelerin kapaklarını monte ediyor. Buna göre sırasıyla birinci ve ikinci makineye giren bir süt şişesi ile sadece üçüncü makineye giren başka bir süt şisesi hangi aşamalardan geçer? Süt şişesine yapılan işlemler iki durumda da aynı olur mu? Sizce bu iki şişe makinelerden çıktıktan sonra içerik bakımından aynı özelliklere sahip midir?

TERİMLER

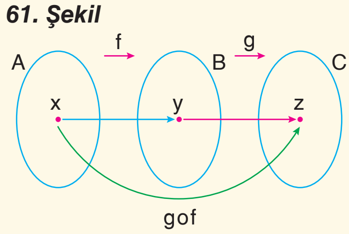
- Yatay doğru testi
- Bileşke fonksiyon
- Fonksiyonun tersi

SEMBOLLER

- f o g
- f^{-1}

İki Fonksiyonun Bileşkesi	Boş olmayan A, B ve C kümeleri için $f : A \to B$, $g : B \to C$ fonksiyonları verilsin. f ve g fonksiyonları yardımıyla A dan C ye tanımlanan yeni fonksiyona f ile g fonksiyonlarının **bileşkesi** denir ve gof biçiminde gösterilir. gof : "g bileşke f" diye okunur. $(gof) : A \to C;\ (gof)(x) = g[f(x)]$ tir.

61. Şekil



1. Örnek

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 4\}$, $C = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$ kümeleri veriliyor.

$f : A \to B$, $f(x) = x^2$ ve $g : B \to C$, $g(x) = x - 2$ olduğuna göre f ve g fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümelerini şema ile gösterelim.

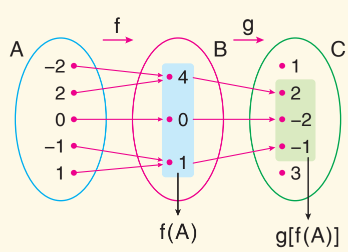
Daha sonra gof fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini şema ile gösterip kuralını bulalım.

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun görüntü kümesi, $f(A) = \{0, 1, 4\}$ tür. [*f(A) = B dir.*]

$g(x) = x - 2$ fonksiyonunun görüntü kümesi, $g(B) = g[f(A)] = \{-2, -1, 2\}$ dir.

Buna göre f ve g fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümeleri "62. Şekil" deki gibidir.

62. Şekil



"62. Şekil"deki şemada görüldüğü gibi A kümesinin elemanları, f ve g fonksiyonlarının yardımı ile C kümesindeki elemanlara eşlenmiştir.

Burada f ve g fonksiyonlarından yararlanılarak A dan C ye yeni bir fonksiyon elde edilmiştir. Bu fonksiyon f ile g fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu olan $g o f$ fonksiyonudur.

$g o f$ fonksiyonunun görüntü kümesi bulunurken tanım kümesindeki bir elemanın önce f fonksiyonu altındaki görüntüsü, sonra da bu görüntünün g fonksiyonu altındaki görüntüsü bulunur.

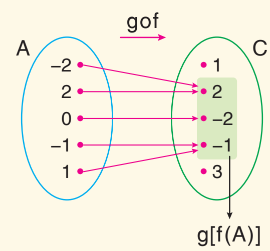
Yani $(g o f) : A \to C$, $(g o f)(x) = g[f(x)]$ dir.

Buna göre yukarıdaki gof fonksiyonunun kuralını bulalım.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2 \\ g(x)=x-2 \end{array}\right\} \Rightarrow (gof)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = x^2 - 2 \text{ bulunur.}$$

O hâlde gof fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesi "63. Şekil"deki gibidir.

63. Şekil



Sıra Sizde

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, $C = \{0, 2, 3, 6\}$ kümeleri veriliyor.

$f : A \to B$, $f(x) = x^2 + 1$ ve $g : B \to C$, $g(x) = x + 1$ olduğuna göre f ve g fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümelerini şema ile gösteriniz. Daha sonra $g o f$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini şema ile gösterip kuralını bulunuz.

2. Örnek

Birbirine bağlı olarak çalışan "64. Şekil"de gösterilen f ve g makineleri gerçek sayılar üzerinde işlem yapmaktadır.

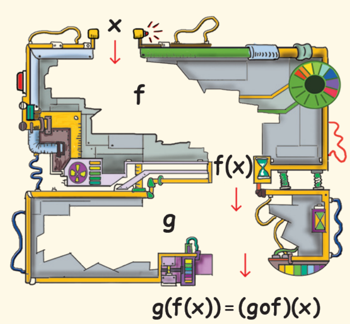
Bu makinelerin kuralları $f(x) = 3x + 1$ ve $g(x) = x + 5$ tir. f makinesinin çıktı değeri, g makinesinin girdi değeri olarak kullanılmaktadır. Buna göre;

a. **Birinci makineye giren, –5, –2, 0, 3, 7 sayıları için makineden hangi değerlerin çıktığını bulalım.**

b. **Bu iki makinenin yaptığı işi tek başına yapabilen $h = g o f$ makinesinin kuralını bulalım.**

c. **İkinci makinenin çıkışından 18 sayısının elde edilmesi için birinci makineden hangi sayının işleme girmesi gerektiğini bulalım.**

64. Şekil



a. Kuralı $f(x) = 3x + 1$ olan fonksiyon makinesine giren $-5, -2, 0, 3, 7$ sayılarının hangi değerlerle çıktığını bulalım. $f(x) = 3x + 1$ için,

$f(-5) = 3.(-5) + 1 = -14$, $f(-2) = 3.(-2) + 1 = -5$,

$f(0) = 3.0 + 1 = 1$, $f(3) = 3.(3) + 1 = 10$,

$f(7) = 3.(7) + 1 = 22$ dir.

Şimdi bu değerleri, kuralı $g(x) = x + 5$ olan ikinci makinede girdi değerleri olarak kullanıp sonuca ulaşalım. $g(x) = x + 5$ için,

$g(-14) = -14 + 5 = -9$, $g(-5) = -5 + 5 = 0$,

$g(1) = 1 + 5 = 6$, $g(10) = 10 + 5 = 15$,

$g(22) = 22 + 5 = 27$ dir.

Buna göre birinci makineye giren, $-5, -2, 0, 3$ ve 7 sayıları ikinci makineden sırasıyla $-9, 0, 6, 15$ ve 27 olarak çıkar.

b. İki makine birlikte, x girdisini işleyip oluşan $f(x)$ çıktısını ikinci makineye alıp $g(f(x))$ sonucuna ulaştırmaktadır. Buna göre bu iki makinenin bileşkesi olan $h = gof$ fonksiyonu,

$$\begin{aligned} h(x) = (gof)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(3x + 1) \\ &= (3x + 1) + 5 \\ &= 3x + 6 \text{ olur.} \end{aligned}$$

c. İkinci makinenin çıkışından 18 sayısının elde edilmesi için birinci makinede hangi sayının işleme girmesi gerektiğini $h = gof$ bileşke fonksiyonunu kullanarak bulabiliriz. Buna göre,

$$\begin{aligned} h(x) = 18 &\Rightarrow 3x + 6 = 18 \\ &\Rightarrow x = 4 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Sıra Sizde

"2. Örnek"te kullanılan fonksiyon makinelerinden g makinesi ile f makinesinin yerlerini değiştirerek

a. $-5, -2, 0, 3$ ve 7 sayılarının ikinci makineden hangi değerlerle çıkacağını bulunuz.

b. Bulduğunuz bu değerlerin öncekilerden farklı çıkmasının sebeplerini açıklayınız.

c. İkinci makinenin çıkışından 25 sayısının elde edilmesi için birinci makineden hangi sayının işleme girmesi gerektiğini bulunuz.

3. Örnek

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre;

a. Bu fonksiyonların bileşkeleri olan fog ve gof fonksiyonlarının kurallarını bulalım.

b. Bir grafik çizim programı kullanarak f, g, fog ve gof fonksiyonlarının grafiklerini çizip bu grafikler arasında benzerliklerin olup olmadığını inceleyelim.

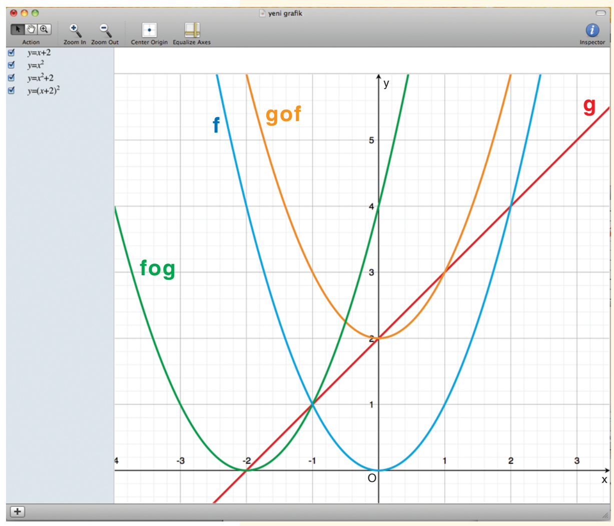
a. Kuralları $f(x) = x^2$ ve $g(x) = x + 2$ olan iki fonksiyon için fog ve gof bileşke fonksiyonları,

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2 \text{ dir.}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2 \text{ dir.}$$

b. "65. Şekil" de grafik çizim programında çizilen fonksiyon grafikleri gösterilmiştir. Doğrusal bir fonksiyon olan g fonksiyonu, ikinci dereceden bir fonksiyon olan f fonksiyonu ile bileşkeye girdiğinde ortaya ikinci dereceden fonksiyonlar çıkmaktadır. Bu nedenle bileşke işlemine göre fonksiyonların grafikleriyle bileşke fonksiyonlarının grafikleri arasında genellikle bir benzerlik ilişkisi bulunmamaktadır.

65. Şekil



Sıra Sizde

Gerçek sayılarda tanımlı iki fonksiyon $f(x) = x^2 + 1$ ve $g(x) = 2x$ olduğuna göre;

a. fog ve gof fonksiyonlarının kurallarını bulunuz.

b. f, g, fog ve gof fonksiyonlarının grafiklerini çizip bu grafikler arasında benzerliklerin olup olmadığını inceleyiniz. Çizimlerinizi grafik çizim programını kullanarak da yapabilirsiniz.

4. Örnek

Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için,

$f(x) = 3x + 1$ ve

$g(x) = x^2 - 1$

olduğuna göre $(fog)(-1)$ değerini bulalım.

1. Yol

$f o g$ nin kuralını bulalım.

$$(f o g)(x) = f[g(x)]$$
$$= f(x^2 - 1)$$
$$= 3(x^2 - 1) + 1$$
$$= 3x^2 - 2 \text{ dir.}$$

Buna göre $(f o g)(-1) = 3.(-1)^2 - 2 = 1$ bulunur.

2. Yol

Çözümü $f o g$ nin kuralını bulmadan yapalım.

$f(x) = 3x + 1$ ve $g(x) = x^2 - 1$ ise,

$$(f o g)(-1) = f[g(-1)]$$
$$= f[(-1)^2 - 1]$$
$$= f(0) = 3.0 + 1 = 1 \text{ dir.}$$

Buna göre $(f o g)(-1) = 1$ bulunur.

Sıra Sizde

Gerçek sayılarda tanımlı iki fonksiyon $f(x) = 2x^2 - 1$ ve $g(x) = x + 1$ olsun. Buna göre $(f o g)(0)$ ve $(g o f)(1)$ değerlerini bileşke fonksiyonların kurallarını bulmadan hesaplayınız.

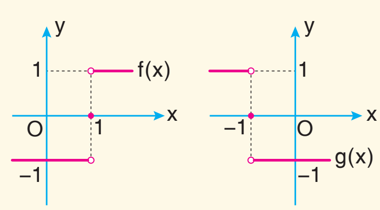
5. Örnek

"66. Şekil" de gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre,

$$(f o g)(-10) + (f o g)(-9) + ... + (f o g)(10)$$

ifadesinin değerini bulalım.

66. Şekil



$(f o g)(x) = f[g(x)]$ olduğundan,

$(fog)(-10) + (fog)(-9) +...+ (f o g)(10) = f[g(-10)] + f[g(-9)] +... + f[g(10)]$ dur.

"66. Şekil" deki fonksiyon grafiklerine göre,

$g(-10) = g(-9) = ... = g(-2) = 1$, $g(-1) = 0$ ve

$g(0) = g(1) = ... = g(10) = -1$ dir.

Buna göre,

$$\underbrace{f[g(-10)]}_{1}+\underbrace{f[g(-9)]}_{1}+...+\underbrace{f[g(-2)]}_{1}+\underbrace{f[g(-1)]}_{0}+\underbrace{f[g(0)]}_{-1}+...+\underbrace{f[g(10)]}_{-1}$$

$$=\underbrace{f(1)+f(1)+...+f(1)}_{9\text{ tane}}+f(0)+\underbrace{f(-1)+...+f(-1)}_{11\text{ tane}}$$

$= 9.f(1) + f(0) + 11.f(-1)$

$= 9.0 + (-1) + 11.(-1)$

$= -12$ bulunur.

Sıra Sizde

"66. Şekil"deki f ve g fonksiyonlarının grafiklerini kullanarak

$$(gof)(-9) + (gof)(-8) + ... + (gof)(9)$$

ifadesinin değerini bulunuz.

6. Örnek

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için,

$$f(x) = 2x - 4 \text{ ve}$$

$$(fog)(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$$

olduğuna göre $g(-2)$ değerini bulalım.

$g(-2) = m$ olsun.

$(fog)(x) = f[g(x)]$ fonksiyonunda $x = -2$ için,

$$f[g(x)] = \frac{3x}{x^2 - 1} \Rightarrow f[g(-2)] = \frac{3.(-2)}{(-2)^2 - 1}$$

$$\Rightarrow f(m) = -2 \text{ bulunur.}$$

Bulduğumuz bu değeri f fonksiyonunun kuralında sağlatalım.

$f(x) = 2x - 4 \Rightarrow f(m) = 2.m - 4$ ve $f(m) = -2$ olduğundan,

$2m - 4 = -2 \Rightarrow m = 1$ dir. O hâlde $m = g(-2) = 1$ bulunur.

Sıra Sizde

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için, $g(x) = 2x + 4$ ve

$(gof)(x) = \dfrac{3 - x}{x^2 + 1}$ olduğuna göre $f(-1)$ değerini bulunuz.

7. Örnek

50 hanenin bulunduğu bir köy, su ihtiyacını bir ayrıtının uzunluğu 10 m olan küp şeklindeki su deposundan karşılamaktadır. Buna göre,

a. x, depoda kalan suyun yüksekliğini göstermek üzere harcanan suyun kaç litre olduğunu modelleyen f(x) fonksiyonunun kuralını bulalım.

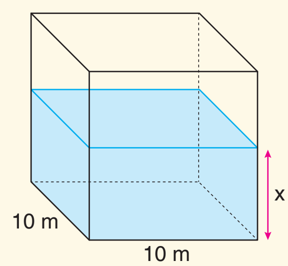
b. Harcanan suyun bedelini tüm hanelerin eşit olarak paylaşacağı bir düzende suyun litresinin 0,003 TL olduğu bilinmektedir. x, harcanan suyun litre cinsinden değerini göstermek üzere hane başına su giderini modelleyen g(x) fonksiyonunun kuralını bulalım.

c. Hane başına ödenen 30 TL fatura için depodaki suyun yüksekliğini bulalım.

a. Su deposunun hacmi,
$V_{su} = 10.10.10 = 1000\ m^3 = 1\,000\,000\ L$ dir. ($1\ L = 1\ dm^3$)
"67. Şekil"de görülen x metre yüksekliğindeki suyun hacmi,
$V_x = 10.10.x = 100x\ m^3 = 100\,000x\ L$ dir.

Buna göre depoda kalan suyun yüksekliği x metre olduğunda harcanan tüm suyun kaç litre olduğunu modelleyen f(x) fonksiyonu,
$f(x) = 1\,000\,000 - 100\,000x = 100\,000(10 - x)$ tir.

67. Şekil



b. Depodan harcanan tüm suyun x litre olduğu bir durumda hane başına su giderini veren g(x) fonksiyonu,

$$g(x) = \frac{0,003.x}{50} \text{ dir.}$$

c. f fonksiyonu, depodaki suyun yüksekliği ile harcanan suyun miktarı arasındaki ilişkiyi; g fonksiyonu da harcanan su ile hane başına düşen ödenecek su gideri arasındaki ilişkiyi göstermektedir. O hâlde depodaki suyun yüksekliği ile hane başına ödenecek su bedelini gösterecek fonksiyonun kuralı, bu fonksiyonun yaptığı işi tek başına yapabilecek gof fonksiyonunun kuralı ile aynıdır. gof fonksiyonunun kuralını bulalım.

$$\begin{aligned}(gof)(x) &= g[f(x)]\\ &= g(100\,000(10 - x))\\ &= \frac{0,003.100\,000(10-x)}{50}\\ &= 6(10 - x)\\ &= 60 - 6x \text{ tir.}\end{aligned}$$

Depodaki suyun yüksekliği ile hane başına ödenecek su bedelini gösteren fonksiyonda çıktının (hane başına ödenen paranın) 30 TL olduğu bilindiğine göre depodaki suyun yüksekliği,

$$\begin{aligned}(gof)(x) = 30 &\Rightarrow 60 - 6x = 30\\ &\Rightarrow 6x = 30\\ &\Rightarrow x = 5 \text{ metre bulunur.}\end{aligned}$$

Sıra Sizde

"7. Örnek" teki köyün hane sayısının 100, su deposunun bir ayrıt uzunluğunun 20 m ve suyun litre fiyatının 0,0025 TL olduğu durumda;

a. f ve g fonksiyonlarının kurallarını bulunuz.

b. Hane başına düşen su giderinin 50 TL olduğu bir ayda depoda kalan suyun yüksekliğinin kaç metre olduğunu bulunuz.

8. Örnek

Bir yük treni, yolculuğu sırasında hareketinden itibaren 1 saat boyunca düzgün bir şekilde hızlanarak 120 km hıza ulaşıp bu hızda sabit kalarak hareket etmektedir. Tren ulaşacağı yere 1 saatlik mesafesi kaldığında da düzgün bir şekilde yavaşlayarak 1 saat içinde durmaktadır. Buna göre;

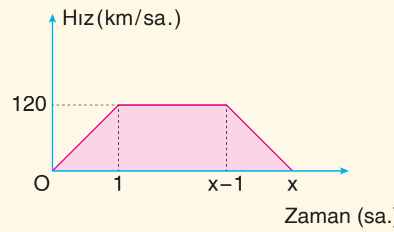
a. x zamanı göstermek üzere trenin zamana bağlı aldığı yol fonksiyonu olan f(x) i bulalım.

b. Her kilometrede ortalama 25 TL lik yakıt tüketen trenin yakıt dışında her sefer için 2000 TL lik gideri olmaktadır. x, kilometre türünden alınan yol olmak üzere trenin aldığı yola bağlı olarak bir seferdeki toplam gider fonksiyonu olan g(x) i bulalım.

c. Bu tren ile başka bir şehre yük göndermek isteyen bir nakliyat firmasına çıkarılan faturanın tutarı 62000 TL olduğuna göre trenin kaç saatlik bir yolculuk yapacağını bulalım.

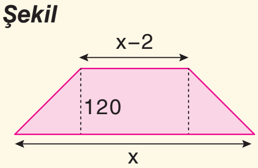
a. Trenin x saatte tamamladığı yolculuğun hız - zaman grafiği "68. Şekil" de gösterilmiştir. Fizikte hız - zaman grafiği ile x ekseninin sınırladığı bölgenin alanı yer değiştirmeyi başka bir deyişle alınan yolu verir.

68. Şekil



"68. Şekil" deki grafiğin x ekseniyle sınırladığı bölge "69. Şekil"de gösterilen yamuğun belirlediği bölgedir. Bu bölgenin alanı yani zamana bağlı yol fonksiyonu,

69. Şekil



$$f(x) = \frac{x+(x-2)}{2}.120$$
$$= (x-1).120$$
$$= 120x - 120 \text{ dir. } (x \geq 2)$$

b. Alınan yolun x kilometre olduğu bir durumda da trenin toplam giderini veren fonksiyon, $g(x) = 25x + 2000$ dir.

c. f fonksiyonu, hareket süresi ile alınan yol arasındaki ilişkiyi; g fonksiyonu da alınan yol ile toplam gider arasındaki ilişkiyi göstermektedir. O hâlde hareket süresi ile toplam gider arasındaki ilişkiyi gösterecek fonksiyonun kuralı bu iki fonksiyonunun yaptığı işi tek başına yapabilecek $g o f$ fonksiyonunun kuralı ile aynıdır.

gof fonksiyonunun kuralını bulalım.

$$\begin{aligned}(gof)(x) &= g[f(x)] \\ &= g(120x - 120) \\ &= 25(120x - 120) + 2000 \\ &= 3000x - 1000 \text{ dir.}\end{aligned}$$

Hareket süresi ile toplam gider arasındaki ilişkiyi gösteren fonksiyonda giderin 62000 TL olduğu bilindiğine göre hareket süresi,

$$\begin{aligned}(gof)(x) = 62000 &\Rightarrow 3000x - 1000 = 62000 \\ &\Rightarrow 3000x = 63000 \\ &\Rightarrow x = 21 \text{ saat bulunur.}\end{aligned}$$

Sıra Sizde

"8. Örnek"teki trenin ulaştığı sabit hızını saatte 100 km, her bir kilometrede ortalama 30 TL yakıt gideri ve 3500 TL diğer giderlerin olduğu durumda;

a. f ve g fonksiyonlarının kurallarını bulunuz.

b. Treni kullanarak başka bir şehre yük göndermek isteyen nakliyat şirketine çıkarılan faturanın tutarı 75500 TL olduğuna göre trenin kaç saatlik bir yolculuk yapacağını bulunuz.

> Fonksiyonlarda, bileşke işleminin değişme özelliği yoktur. Gerçek sayılarda tanımlı, birbirinden farklı f ve g fonksiyonları için genel olarak $fog \neq gof$ dir.

9. Örnek

$\mathbb{R}$ de tanımlı, $f(x) = x^2 - 1$ ve $g(x) = x - 1$ fonksiyonları veriliyor. fog ve gof fonksiyonlarının kurallarını bulup bunların birbirine eşit olup olmadığını gösterelim.

$$\begin{aligned}(fog)(x) &= f[g(x)] \\ &= f(x - 1) \\ &= (x - 1)^2 - 1 \\ &= x^2 - 2x \text{ tir.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}gof(x) &= g[f(x)] \\ &= g(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1) - 1 \\ &= x^2 - 2 \text{ dir.}\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi $(fog)(x) \neq (gof)(x)$ tir.

Sıra Sizde

$\mathbb{R}$ de tanımlı $f(x) = 2x^2$ ve $g(x) = 1 - x$ fonksiyonları için fog ve gof fonksiyonlarının kurallarını bulup bu kuralları karşılaştırınız.

Fonksiyonlarda, bileşke işleminin birleşme özelliği vardır. Gerçek sayılarda tanımlı f, h ve g fonksiyonları için $(foh)og = fo(hog)$ dir.

10. Örnek

$\mathbb{R}$ de tanımlı, $f(x) = 2x$, $h(x) = x - 3$ ve $g(x) = x^2 + 1$ fonksiyonları veriliyor. $(foh)og$ ve $fo(hog)$ fonksiyonlarının kurallarını bulup bu kuralları karşılaştıralım.

$$\begin{aligned}[(foh)og](x) &= [(foh)]og(x)\\ &= [f(h(x))]og(x)\\ &= f(x-3)og(x)\\ &= 2(x-3)o(x^2+1)\\ &= 2(x^2+1-3)\\ &= 2(x^2-2)\\ &= 2x^2-4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[fo(hog)](x) &= fo[(hog)(x)]\\ &= f[h(g(x))]\\ &= f[h(x^2+1)]\\ &= f[(x^2+1)-3]\\ &= f(x^2-2)\\ &= 2(x^2-2)\\ &= 2x^2-4\end{aligned}$$

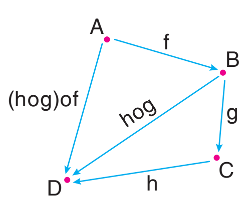
Görüldüğü gibi $(foh)og$ ve $fo(hog)$ fonksiyonlarının kuralları aynıdır.

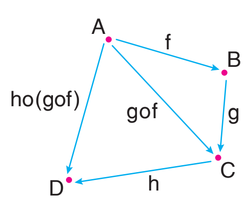
Sıra Sizde

$\mathbb{R}$ de tanımlı $f(x) = 2x + 1$, $h(x) = x - 1$ ve $g(x) = 2x^2$ fonksiyonları için $(foh)og$ ve $fo(hog)$ fonksiyonlarının kurallarını bulup bu kuralları karşılaştırınız.

DÜŞÜNCE KUTUSU

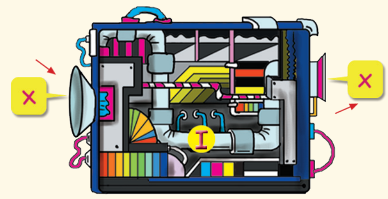
$g : B \to C$, $h : C \to D$, $f : A \to B$ olmak üzere g, h ve f fonksiyonları verilsin. Aşağıdaki şemaları kullanarak fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliğinin olduğunu gösterebilir misiniz? Nasıl?





f: A → B şeklinde tanımlı f fonksiyonu ve I: A → A şeklinde tanımlı I(x) = x fonksiyonu verilsin. A kümesinde tanımlı her bir f fonksiyonu için, $f o I = I o f = f$ koşulunu sağlayan $I(x) = x$ fonksiyonu, bileşke işleminde birim (etkisiz) fonksiyondur.

70. Şekil



11. Örnek

ℝ de tanımlı, $f(x) = 2 - 5x$ ve $g(x) = x$ fonksiyonları veriliyor. fog ve gof fonksiyonlarının kurallarını bulalım.

$(fog)(x) = f[g(x)] = f(x) = 2 - 5x$

$gof(x) = g[f(x)] = g(2 - 5x) = 2 - 5x$

Görüldüğü gibi $g(x) = x$ için $(fog)(x) = (gof)(x) = f(x)$ tir.

Sıra Sizde

ℝ de tanımlı, $f(x) = x^2 + 1$ ve $g(x) = x$ fonksiyonları veriliyor. fog ve gof fonksiyonlarının kurallarını bulup bu kuralları karşılaştırınız. Elde ettiğiniz sonuca neyin sebep olduğunu açıklayınız.

Bire Bir ve Örten Fonksiyonlar ile İlgili Uygulamalar

Yatay Doğru Testi

Grafiği verilen bir fonksiyonun bire bir, örten ya da içine olduğunu yatay doğru testi ile belirleyebiliriz. Yatay doğru testinde, grafiği verilen fonksiyonun değer kümesindeki elemanlardan x eksenine paralel doğrular çizilir. Bu doğrular fonksiyonun grafiğini;

- Daima keserse fonksiyon örtendir.
- Bazen keser, bazen kesmezse fonksiyon içinedir.
- En fazla bir noktada keserse fonksiyon bire birdir, birden fazla noktada keserse bire bir değildir.

12. Örnek

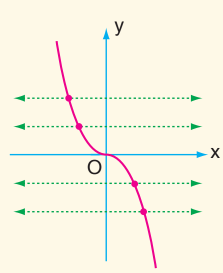
Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini inceleyelim.

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^3$ **b.** $h: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ h(x) = \dfrac{1 + x^2}{x^2}$

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^3$ fonksiyonunun grafiği "71. Şekil" de verilmiştir.

x eksenine paralel çizilen her doğru $y = -x^3$ eğrisini daima bir noktada kestiğinden f fonksiyonu bire bir ve örtendir.

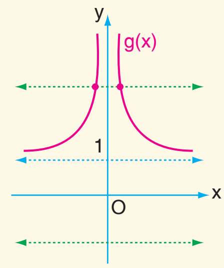
71. Şekil



b. $g : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \ g(x) = \dfrac{1 + x^2}{x^2}$ fonksiyonunun grafiği "72. Şekil" de verilmiştir.

x eksenine paralel çizilen doğrulardan bazıları fonksiyonun grafiğini kesmediği için fonksiyon içinedir. x eksenine paralel çizilen doğrulardan bazıları ise fonksiyonun grafiğini birden fazla noktada kestiği için fonksiyon bire bir değildir.

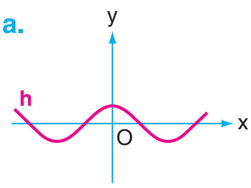
72. Şekil



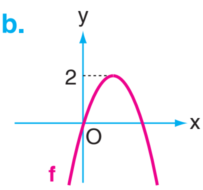
Sıra Sizde

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \ f : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 2], \ k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R},$ olmak üzere aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlardan hangilerinin tanımlı oldukları aralıklarda bire bir, örten veya içine olduklarını bulunuz.

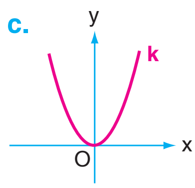
a.



b.



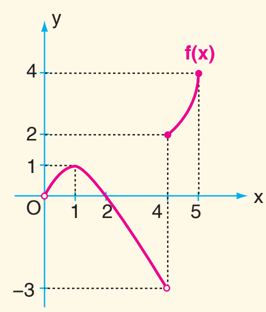
c.



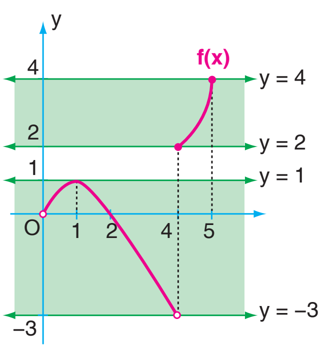
13. Örnek

"73. Şekil" deki grafik $f : (0, 5] \rightarrow (-3, 4]$ şeklinde tanımlı f fonksiyonuna aittir. Buna göre bu fonksiyonun bire bir ve örten olup olmadığını inceleyelim.

73. Şekil



74. Şekil



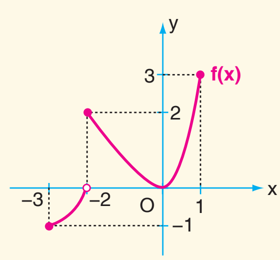
"74. Şekil" deki f fonksiyonunun grafiğinin çizili olduğu yerlere yatay doğrular çizelim. Bu doğruları $y = -3$ ten $y = 1$ e kadar çizdiğimizde, doğruların fonksiyonu kestiği noktaların apsisleri $(0, 4)$; doğruları $y = 2$ den $y = 4$ e kadar çizdiğimizde doğruların fonksiyonu kestiği noktaların apsisleri $[4, 5]$ dir. Bu iki kümeyi birleştirirsek, $(0, 4) \cup [4, 5] = (0, 5]$ olmaktadır. Ancak tanım kümesini bulmamıza yarayan yatay doğrular $(-3, 1] \cup [2, 4]$ aralıklarında çizilmiş olup $(1, 2)$ aralığı görüntü kümesinde yer almamaktadır. O hâlde fonksiyon örten değildir.

Ayrıca fonksiyon y eksenindeki $(0, 1)$ aralığında çizilen yatay doğrularla iki noktada kesiştiğinden bire bir de değildir.

Sıra Sizde

"75. Şekil" deki grafik $f : [-3, 1] \rightarrow [-1, 3]$ şeklinde tanımlı f fonksiyonuna aittir. Buna göre bu fonksiyonun bire bir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.

75. Şekil

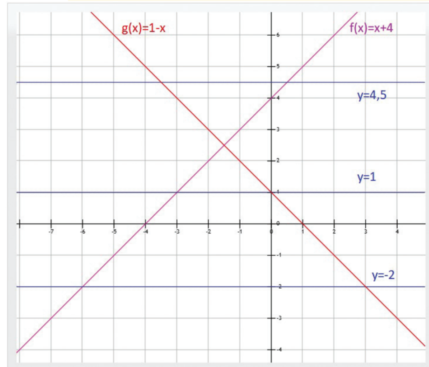


14. Örnek

$\mathbb{R}$ de tanımlı bire bir ve örten $f(x) = x + 4$ ve $g(x) = 1 - x$ fonksiyonları verilmiş olsun. Bu iki fonksiyonun bileşkelerinin bire bir ve örten olup olmayacağını inceleyelim.

Bu fonksiyonların bire bir ve örten olduğunu fonksiyon çizim aracında çizeceğimiz grafiklerle gösterelim. "76. Şekil"den de görüldüğü üzere çizilen her bir yatay doğru f ve g fonksiyonlarının grafiklerini sadece birer noktada kesmektedir. O hâlde f ve g fonksiyonları bire birdir.

76. Şekil



Çizilecek her yatay doğrunun fonksiyon grafiğini kestiği noktanın apsisi de gerçek sayı olacağından fonksiyonlar aynı zamanda örtendir.

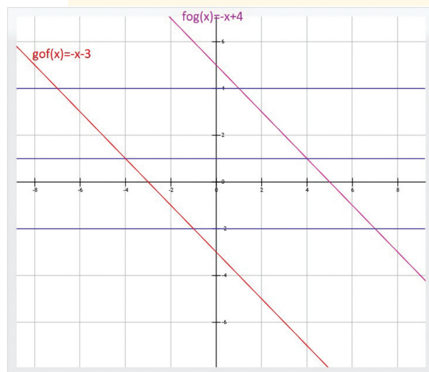
Şimdi f ve g nin bileşkeleri olan fog ve gof fonksiyonlarının kurallarını bulalım.

$(fog)(x) = f[g(x)] = f(1 - x) = (1 - x) + 4 = -x + 5$ tir.

$(gof)(x) = g[f(x)] = g(x - 4) = 1 - (x + 4) = -x - 3$ tür.

Bileşke işlemlerinden sonra ortaya çıkan doğrusal fonksiyonların grafiklerini fonksiyon çizim aracında çizip grafikleri yatay doğrularla keselim.

77. Şekil



"77. Şekil"de gösterilen fog ve gof fonksiyonlarının grafikleri çizilen her bir yatay doğru tarafından tek noktada kesilmektedir. O hâlde fog ve gof fonksiyonları bire birdir.

Çizilecek her yatay doğrunun fonksiyon grafiğini kestiği noktanın apsisi de gerçek sayı olacağından fog ve gof fonksiyonları aynı zamanda örtendir.

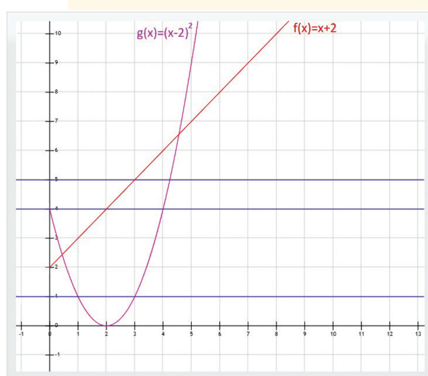
Sıra Sizde

$\mathbb{R}$ de tanımlı $f(x) = 2x - 4$ ve $g(x) = x + 2$ fonksiyonlarının fog ve gof bileşke fonksiyonlarının bire birlik ve örtenlik durumunu grafik çizerek araştırınız.

15. Örnek

$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ kümesinde tanımlı bire bir $f(x) = x + 2$ ve bire bir olmayan $g(x) = (x - 2)^2$ fonksiyonları verilmiş olsun. Bu iki fonksiyonun bileşkelerinin bire bir olup olmayacağını inceleyelim.

78. Şekil



Bu fonksiyonların bire birlik durumlarını fonksiyon çizim aracında çizeceğimiz grafiklerle gösterelim. "78. Şekil"den de görüldüğü üzere çizilen her bir yatay doğru f fonksiyonunu en çok bir noktada kestiğinden f bire birdir. Ancak g fonksiyonunun grafiği çizilen yatay doğruların en az biri tarafından iki noktada kesilmiştir. O hâlde g fonksiyonu bire bir değildir.

Şimdi f ve g nin bileşkeleri olan fog ve gof fonksiyonlarının kurallarını bulalım.

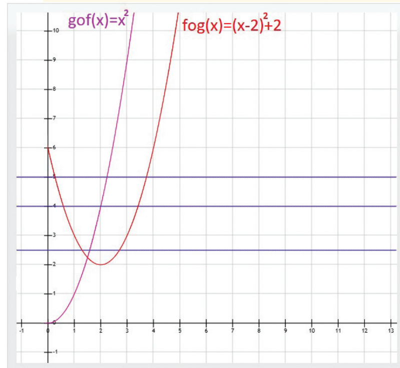
$(fog)(x) = f[g(x)] = f(x-2) = (x-2)^2 + 2$ dir.

$(gof)(x) = g[f(x)] = g(x+2) = (x+2-2)^2 = x^2$ dir.

Bileşke işlemlerinden sonra ortaya çıkan fonksiyonların grafiklerini fonksiyon çizim aracında çizip grafikleri yatay doğrularla keselim.

"79. Şekil"de gösterilen fog fonksiyonunun grafiği çizilen her bir yatay doğruların en az biri tarafından iki noktada kesildiğinden bire bir değildir. Ancak gof fonksiyonunun grafiği çizilen her bir yatay doğru tarafından tek noktada kesilmektedir. O hâlde gof fonksiyonu bire birdir.

79. Şekil



Sıra Sizde

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tanımlı $f(x) = x - 3$ ve $g(x) = x^2 - 4$ fonksiyonlarının grafiklerini grafik çizim aracıyla çizip bire birliğini ve örtenliğini inceleyiniz. Daha sonra fog ve gof bileşke fonksiyonları için de grafik çizerek bire bir olma durumlarını inceleyiniz.

Bir Fonksiyonun Tersi

İskenderun, Türkiye'nin en büyük ilçelerinden biri olup özellikle sanayi, deniz ticareti ve turizm alanında hızla gelişmektedir. İskenderun'un ayrı bir özelliği ise meteoroloji genel müdürlüğü tarafından verilen bilgiye göre 1962 yılında 21,3 °C (derece selsiyus) ile en yüksek yıllık ortalama sıcaklık değerine sahip olmasıdır. Kaydedilen bu sıcaklık değeri $\frac{9}{5}$ ile çarpılıp bulunan sonuca 32 eklenince bulunan değer bu sıcaklığın F (Fahrenhayt) türünden değerini göstermektedir.

Sizce F türünden verilen her sıcaklık değerine °C türünden bir sıcaklık değeri karşılık gelir mi? ("21. Örnek"e bakınız.)

ETKİNLİK

A = {3, 5, 7} ve B = {2, 3, 4} olmak üzere;

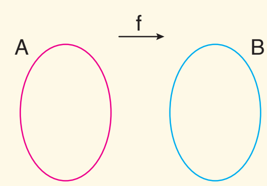
- $f: A \to B$, $f(x) = \frac{x+1}{2}$ fonksiyonunu "80. Şekil"deki şema üzerinde gösteriniz.
- $g: B \to A$, $g(x) = 2x - 1$ fonksiyonunu "81. Şekil"deki şema üzerinde gösteriniz.

➢ f ve g fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümelerini, eşleştirdikleri elemanlar arasındaki ilişkiyi inceleyiniz. Çıkardığınız bir sonuç varsa açıklayınız.

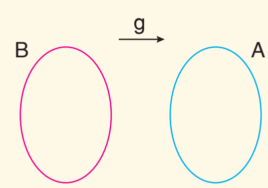
- fog ve gof fonksiyonlarının kurallarını bulunuz.

➢ f ile g fonksiyonlarının arasındaki ilişkinin ne olabileceğini açıklayınız.

80. Şekil

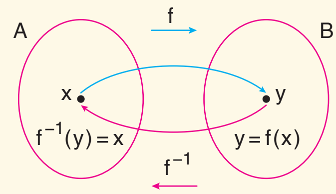


81. Şekil



Bir Fonksiyonun Tersi	• $f: A \to B$, bire bir ve örten fonksiyon ise, $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ tir. $f^{-1}: B \to A$, $y \to f^{-1}(y) = x$ fonksiyonuna **f nin ters fonksiyonu** denir. • $f: A \to B$, bire bir ve örten fonksiyon; $I: A \to A$, birim fonksiyon ise, $f o f^{-1} = f^{-1} o f = I$ dir.

82. Şekil

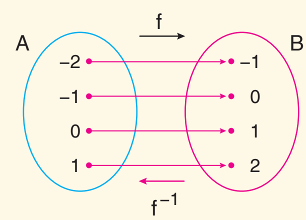


16. Örnek

$A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, $C = \{-1, 0, 1\}$, $D = \{0, 1\}$, $E = \{-1, 1, 3\}$ ve $F = \{0, 1, 2, 3\}$ kümeleri üzerinde, $f: A \to B$, $f(x) = x + 1$; $k: C \to D$, $k(x) = x^2$ ve $h: E \to F$, $h(x) = \frac{x+1}{2}$ fonksiyonları tanımlanıyor. Bu fonksiyonları şema ile gösterip terslerinin fonksiyon olup olmadığını belirleyelim.

f fonksiyonunun liste biçiminde yazılışı, $f = \{(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$ dir. Tanım kümesi A, değer kümesi B olan f fonksiyonu şema ile "83. Şekil"de gösterilmiştir. Şemadan görüldüğü üzere f fonksiyonu bire bir ve örtendir. Örten f fonksiyonunun tersi olan f^{-1} fonksiyonunun tanım kümesi B olacak ve bu kümede açıkta eleman kalmayacaktır. Ayrıca f bire bir olduğundan f^{-1} fonksiyonunda tanım kümesinin bir elemanı birden fazla elemanla eşlenmeyecektir.

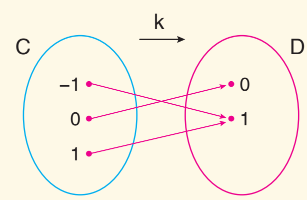
83. Şekil



Dolayısıyla f^{-1} fonksiyonunun liste biçiminde yazılışı,
$f^{-1} = \{(-1, -2), (0, -1), (1, 0), (2, 1)\}$ dir.

k fonksiyonunun liste biçiminde yazılışı, $k = \{(-1, 1), (1, 1), (0, 0)\}$ dir. Tanım kümesi C, değer kümesi de D olan g fonksiyonu şema ile "84. Şekil"de gösterilmiştir. Şemadan görüldüğü üzere k fonksiyonu bire bir değil ancak örtendir.

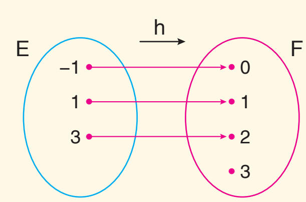
84. Şekil



Bire bir olmayan k fonksiyonunun tersi olan k^{-1}, tanım kümesinin bir elemanını birden fazla elemanla eşleyecektir. Buna göre k^{-1} bir fonksiyon değildir. Başka bir deyişle k fonksiyonunun tersi yoktur.

h fonksiyonunun liste biçiminde yazılışı, $h = \{(-1, 0), (1, 1), (3, 2)\}$ dir. Tanım kümesi E, değer kümesi de F olan h fonksiyonu şema ile "85. Şekil"de gösterilmiştir. Şemadan görüldüğü üzere h fonksiyonu bire birdir, ancak örten değildir.

85. Şekil



Örten olmayan h fonksiyonunun tersi olan h^{-1} in tanım kümesinde açıkta eleman kalacaktır. Buna göre h^{-1} bir fonksiyon değildir. Başka bir deyişle h fonksiyonunun tersi yoktur.

Sıra Sizde

$A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 0\}$, $C = \{0, 1, 2\}$, $D = \{-1, 0, 1\}$,

$E = \{-1, -2, -3\}$ ve $F = \{0, 2, 4, 6\}$ kümeleri üzerinde, $f : A \to B$,

$f(x) = x^2 - 1$; $g : C \to D$, $g(x) = x - 1$ ve $h : E \to F$, $h(x) = -2x$ fonksiyonları tanımlansın. Bu fonksiyonları şema ile gösterdikten sonra hangilerinin terslerinin fonksiyon olmadığını açıklayınız.

DİKKAT

Bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olması için o fonksiyonun bire bir ve örten olması gereklidir.

17. Örnek

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ve $B = \{-2, 1, 4, 7\}$ kümeleri ile $f : A \to B$, $f(x) = 3x + 1$ fonksiyonu veriliyor.

a. f ve f^{-1} fonksiyonlarını liste biçiminde yazalım.

b. f^{-1} fonksiyonunun kuralını bulalım.

a. $f(x) = 3x + 1$ ise,

$f(-1) = 3.(-1) + 1 = -2$, $f(0) = 3.0 + 1 = 1$,

$f(1) = 3.1 + 1 = 4$ ve $f(2) = 3.2 + 1 = 7$ olur.

Buna göre $f = \{(-1, -2), (0, 1), (1, 4), (2, 7)\}$ bulunur. f fonksiyonu buradan görüldüğü gibi bire bir ve örtendir. Buna göre,

$f(-1) = -2 \Rightarrow f^{-1}(-2) = -1$, $f(0) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0$,

$f(1) = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = 1$ ve $f(2) = 7 \Rightarrow f^{-1}(7) = 2$ dir.

O hâlde ters fonksiyon $f^{-1} = \{(-2, -1), (1, 0), (4, 1), (7, 2)\}$ olur.

b. 1. Yol

$f(x) = 3x + 1$ veya $y = 3x + 1$ eşitliğinde x i yalnız bırakarak f fonksiyonunun tersini, yani $f^{-1}(x)$ i bulmuş oluruz.

O hâlde,

$y = 3x + 1 \Rightarrow 3x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{3}$ tür. *(Tanım kümesinin elemanını x ile gösterebiliriz.)*

Bu durumda $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$ bulunur.

2. Yol

$fof^{-1} = I$ olduğunu biliyoruz.

O hâlde

$$(fof^{-1})(x) = I(x) \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = x$$

$$\Rightarrow 3.f^{-1}(x) + 1 = x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$A = \{-2, 0, 2, 4\}$ ve $B = \{-2, -1, 0, 1\}$ kümeleri ile $f : A \to B,\ f(x) = \dfrac{x-2}{2}$ fonksiyonu veriliyor.

a. f ve f^{-1} fonksiyonlarını liste biçiminde yazınız.

b. f^{-1} fonksiyonunun kuralını bulunuz.

> Bire bir ve örten $f(x) = ax \pm b$ $(a \neq 0)$ fonksiyonunun tersi
>
> $f^{-1}(x) = \dfrac{x \mp b}{a}$ dır.

18. Örnek

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2-3x}{5}$ fonksiyonunun tersinin kuralını ve $(f o f^{-1})(x)$ i bulalım.

Fonksiyonun tersini iki farklı yolla bulalım.

1. Yol

$f(x) = \dfrac{2-3x}{5}$ veya $y = \dfrac{2-3x}{5}$ eşitliğinde x i yalnız bırakalım:

$$y = \frac{2-3x}{5} \Rightarrow 5y = 2 - 3x$$
$$\Rightarrow 3x = 2 - 5y$$
$$\Rightarrow x = \frac{2-5y}{3}$$ *(y yerine x yazalım.)*

O hâlde $f^{-1}(x) = \dfrac{2-5x}{3}$ bulunur.

2. Yol

Bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu vereceğinden, $(f o f^{-1})(x) = I(x)$ tir. O hâlde,

$$f[f^{-1}(x)] = x \Rightarrow \frac{2-3f^{-1}(x)}{5} = x$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2-5x}{3}$$ bulunur.

Gerçekten,

$$(f o f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(\frac{2-5x}{3}\right)$$
$$= \frac{2 - \cancel{3}.\left(\frac{2-5x}{\cancel{3}}\right)}{5} = \frac{\cancel{2} - \cancel{2} + 5x}{5} = x$$ bulunur.

Benzer şekilde $(f^{-1} o f)(x) = x$ dir.

Sıra Sizde

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{3x+2}{4}$ fonksiyonunun tersinin kuralını "14. Örnek"te kullandığımız iki farklı yolla bulunuz.

19. Örnek

$f : \mathbb{R}-\{-3\} \rightarrow \mathbb{R}-\{1\},\ f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulalım.

Bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyonu vereceğinden,
$(f o f^{-1})(x) = I(x)$ tir.

O hâlde,

$$f[f^{-1}(x)] = x \quad \Rightarrow \frac{f^{-1}(x)-2}{f^{-1}(x)+3} = x$$

$$\Rightarrow x.f^{-1}(x) + 3x = f^{-1}(x) - 2$$

$$\Rightarrow x.f^{-1}(x) - f^{-1}(x) = -3x - 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x).[x-1] = -3x - 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-3x-2}{x-1} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$f : \mathbb{R}-\{2\} \rightarrow \mathbb{R}-\{5\},\ f(x) = \dfrac{5x-1}{x-2}$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz.

> $f : \mathbb{R}-\left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \rightarrow \mathbb{R}-\left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ olmak üzere, bire bir ve örten $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$
> fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$ dır.
>
> *(a ile d katsayıları çapraz olarak yer ve işaret değiştirir.)*

20. Örnek

$f : A \rightarrow B,\ f(x) = \dfrac{5}{x-3}$ şeklinde tanımlanan bire bir ve örten f fonksiyonunun en geniş tanım ve değer kümelerini bulalım.

f fonksiyonunun tanım kümesi, $\dfrac{5}{x-3}$ ifadesini tanımsız yapmayan x değerlerinin kümesidir. Fonksiyonun paydasını sıfır yapan x değeri,
$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ tür.

O hâlde $f(x)$ in tanım kümesi, $A = \mathbb{R} - \{3\}$ tür.

f fonksiyonunun değer kümesi ise fonksiyonun tersinin tanım kümesidir. Buna göre $f^{-1}(x)$ i bulalım.

$$f(x)=\frac{5}{x-3}=\frac{0x+5}{x-3}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x+5}{x-0}=\frac{3x+5}{x} \text{ bulunur.}$$

f^{-1} fonksiyonunun tanım kümesi, $\frac{3x+5}{x}$ ifadesini tanımsız yapmayan x değerlerinin kümesi; yani, $\mathbb{R}-\{0\}$ dır.

O hâlde f fonksiyonunun değer kümesi de $B=\mathbb{R}-\{0\}$ dır.

Sıra Sizde

$f:\mathbb{R}-\{a\}\rightarrow\mathbb{R}-\{b\}, f(x)=\frac{4x+3}{x}$ fonksiyonunun tanım ve değer kümelerindeki a ve b sayılarını bulunuz.

21. Örnek

Konunun girişinde bahsettiğimiz sıcaklık ölçü birimlerinden °C (*derece selsiyus*) ile F (*Fahrenhayt*) arasında $C=\frac{5}{9}(F-32)$ bağıntısı vardır. Değerli metallerden saf altının kaynama noktası 2856 °C dir. Yukarıdaki bağıntıda F türünden sıcaklığı x; °C türünden sıcaklığı y göstermek üzere bir fonksiyon biçiminde ifade edelim. Daha sonra altının kaynama noktasını F türünden göstermek için ifade ettiğimiz fonksiyonun tersinden yararlanalım.

x, F türünden sıcaklığı; y de °C türünden sıcaklığı göstermek üzere

$C=\frac{5}{9}(F-32)$ bağıntısı $y=f(x)=\frac{5}{9}(x-32)$ şeklinde ifade edilebilir.

Bu fonksiyon, F türünden sıcaklığı °C türünden sıcaklığa dönüştürmektedir. Buna göre °C türünden sıcaklığı F türünden sıcaklığa dönüştürecek olan ters fonksiyonun kuralını bulalım.

$(f\circ f^{-1})(x)=I(x)$ tir. O hâlde,

$$f[f^{-1}(x)]=x\Rightarrow \frac{5}{9}(f^{-1}(x)-32)=x$$

$$\Rightarrow 5(f^{-1}(x)-32)=9x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)-32=\frac{9x}{5}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{9x}{5}+32 \text{ bulunur.}$$

O hâlde altının kaynama noktasının F türünden değeri,

$$f^{-1}(x)=\frac{9x}{5}+32\Rightarrow f^{-1}(2856)=\frac{9.2856}{5}+32$$

$$=5172{,}8 \text{ F bulunur.}$$

Sıra Sizde

A ve B birimleri arasında $A = 25 - \frac{4B}{5}$ ilişkisi bulunmaktadır. y ve x sırasıyla A ve B birimlerini göstermek üzere bu iki birim arasındaki ilişkiyi gösteren $y = f(x)$ fonksiyonunun kuralını yazınız. Bu fonksiyonun tersini kullanarak $A = 145$ olduğu durumda B nin kaç olacağını bulunuz.

> Bir fonksiyon ile tersinin grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

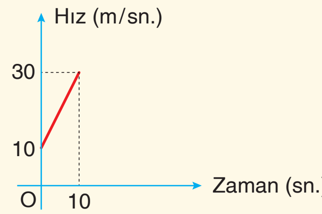
22. Örnek

İlk hızı 10 m/sn. olan bir otobüsün 10. saniye sonundaki hızı 30 m/sn. dir. "86. Şekil" de bu otobüsün hızının zamana bağlı grafiği verilmiştir.

a. Otobüsün hızını zamanın bir fonksiyonu olarak yazıp bu fonksiyonun tanım ve değer kümelerini bulalım.

b. Hız - zaman fonksiyonunun ters fonksiyonunun kuralını, ters fonksiyonun tanım ve değer kümelerini bulalım. Fonksiyon ile tersinin grafiğini aynı koordinat sisteminde gösterelim.

86. Şekil



a. "86. Şekil" de görüldüğü üzere fonksiyonun tanım ve değer kümeleri,

$f : [0, 10] \to [10, 30]$ şeklindedir.

Zaman x, hız y olmak üzere saniyede hızı 2 m/sn. artan ve ilk hızı 10 m/sn. olan otobüsün zamana bağlı fonksiyonu, $f(x) = 2x + 10$ dur.

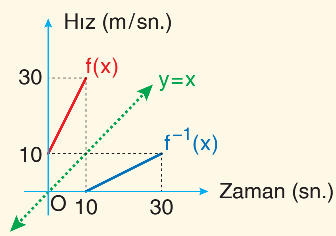
b. f fonksiyonu için $f : [0, 10] \to [10, 30]$ ise $f^{-1} : [10, 30] \to [0, 10]$ şeklindedir.

Bire bir ve örten $f(x) = ax + b$ için $f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$ olduğunu görmüştük.

O hâlde, $f(x) = 2x + 10 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 10}{2}$ dir.

f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri "87. Şekil" de gösterilmiştir. Bu grafiklerin $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğuna dikkat ediniz.

87. Şekil

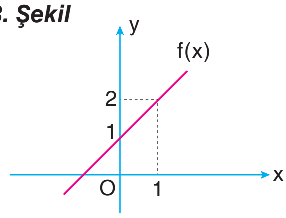


Sıra Sizde

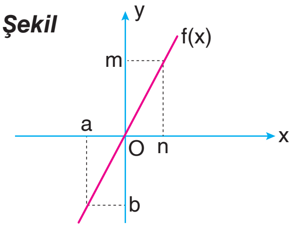
İlk hızı 30 km/sa. olan bir trenin 6 saat sonraki hızı 120 km/sa. tir. Buna göre bu trenin hızının zamana göre fonksiyonunu ve bu fonksiyonun tersinin kuralını bulunuz. Bulduğunuz iki fonksiyonun aynı koordinat sisteminde grafiklerini çiziniz.

23. Örnek

a. *88. Şekil*



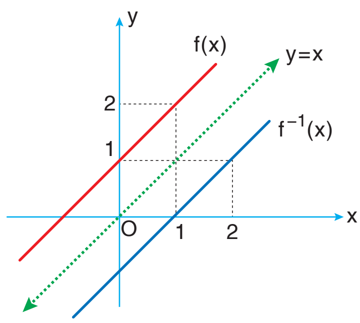
b. *89. Şekil*



"88. Şekil" ve "89. Şekil"de grafiği verilen fonksiyonların ters fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.

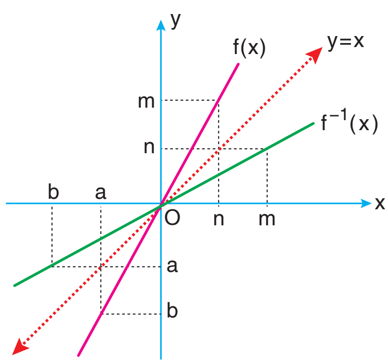
a. "88. Şekil"deki gerçek sayılarda bire bir ve örten f fonksiyonunun y = x doğrusuna göre simetriğini alırsak ters fonksiyonun grafiğini bulmuş oluruz. Buna göre f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri "90. Şekil"de birlikte gösterilmiştir.

90. Şekil



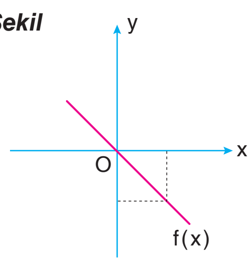
b. "89. Şekil"deki gerçek sayılarda bire bir ve örten f fonksiyonunun y = x doğrusuna göre simetriğini alırsak ters fonksiyonun grafiğini bulmuş oluruz. Buna göre f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri "91. Şekil"de birlikte gösterilmiştir.

91. Şekil

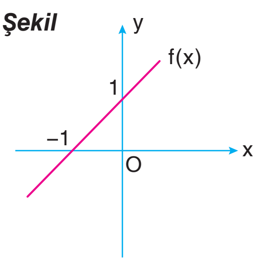


Sıra Sizde

a. *92. Şekil*



b. *93. Şekil*



Yukarıda verilen fonksiyonların ve ters fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat sisteminde çiziniz.

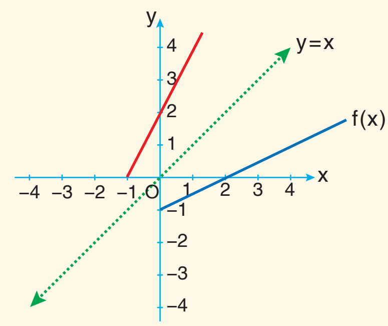
DÜŞÜNCE KUTUSU

f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-2}{2}$ fonksiyonu verilsin.

a. f fonksiyonunun tersi de fonksiyon mudur?

b. "94. Şekil"de kırmızı ile gösterilen grafik, f fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir. Buna göre kırmızı ile gösterilen grafiğe bakarak f fonksiyonunun tersinin fonksiyon olup olmadığını anlayabilir miyiz?

94. Şekil



Tanımlı olduğu yerlerde bire bir ve örten f fonksiyonu için,

$(f^{-1})^{-1} = f$ dir.

24. Örnek

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$ fonksiyonunun tersinin tersini bulalım.

$f(x) = 2x - 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{2}$ olur.

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{1x+5}{0x+2} \Rightarrow (f^{-1})^{-1}(x) = \dfrac{-2x+5}{0x-1} = \dfrac{-2x+5}{-1}$

$= 2x - 5$ bulunur.

Sıra Sizde

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = \dfrac{x-2}{2}$ fonksiyonunun tersinin tersini bulunuz.

Gerçek sayılarda tanımlı, bire bir ve örten f ve g fonksiyonları için,
$(f o g)^{-1} = g^{-1} o f^{-1}$ dir.

25. Örnek

$\mathbb{R}$ de tanımlı, $f(x) = x + 3$ ve $g(x) = 2x + 1$ fonksiyonları veriliyor. $(f o g)^{-1}$ ve $g^{-1} o f^{-1}$ fonksiyonlarının kurallarını bularak bu kuralları karşılaştıralım.

$(f o g)(x) = f[g(x)] = f(2x+1) = (2x+1) + 3 = 2x + 4$ tür.

$(f o g)(x) = 2x + 4$ fonksiyonunun tersi ise $(f o g)^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{2}$ dir.

Şimdi, g^{-1} ve f^{-1} fonksiyonlarını bularak $g^{-1} o f^{-1}$ ni elde edelim.

$g(x) = 2x + 1 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ ve $f(x) = x + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 3$ tür.

$$
\begin{aligned}
(g^{-1} o f^{-1})(x) &= g^{-1}[f^{-1}(x)] \\
&= g^{-1}(x-3) \\
&= \frac{(x-3)-1}{2} \\
&= \frac{x-4}{2} \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

O hâlde $(fog)^{-1}$ ve $g^{-1} of^{-1}$ fonksiyonları eşittir.

Sıra Sizde

$\mathbb{R}$ de tanımlı $f(x) = 2x - 1$ ve $g^{-1}(x) = x + 2$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre $(fog)^{-1}$ fonksiyonunun kuralını bulunuz.

> $\mathbb{R}$ de tanımlı f, g ve h fonksiyonları için $f[g(x)] = h(x)$ eşitliğinden $f(x)$ i bulmak için bu eşitlikte x yerine $g^{-1}(x)$ yazılır.

26. Örnek

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f fonksiyonu için $f(2x+5) = 3x - 8$ ise $f(x)$ i bulalım.

$2x + 5 = g(x)$ olsun. $g^{-1}(x)$ i, verilen ifadede x yerine yazarsak $f(x)$ i buluruz.

$g(x) = 2x + 5 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ olur.

$$f(2x+5) = 3x - 8 \quad \left(\textit{x yerine } \frac{x-5}{2} \textit{ yazalım.} \right)$$

$$f\left(2.\frac{x-5}{2} + 5\right) = 3.\frac{x-5}{2} - 8 \Rightarrow f(x) = \frac{3x - 15 - 16}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3x-31}{2} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$\mathbb{R}$ de tanımlı f fonksiyonu için $f\left(\frac{x+1}{3}\right) = 2x + 1$ ise $f(x)$ i bulunuz.

27. Örnek

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları için,
$f(x) = 3x - 1$ ve $(fog)(x) = 4x + 5$ olduğuna göre $g(x)$ i bulalım.

g(x) i iki farklı yolla bulalım:

I. Yol

$(fog)(x) = 4x + 5 \Rightarrow f[g(x)] = 4x + 5$

$\Rightarrow 3g(x) - 1 = 4x + 5$

$\Rightarrow g(x) = \dfrac{4x+6}{3}$ olur.

II. Yol

$(fog)(x) = 4x + 5$ eşitliğinde, $4x + 5 = h(x)$ diyelim.

$(fog)(x) = h(x)$ ... **(I)** eşitliğinden, $g(x)$ i bulmak için $f(x)$ i yok edelim.

$\underbrace{[f^{-1}o(f}_{I}og)](x) = (f^{-1}oh)(x)$ *(**I** eşitliğinin iki yanına f^{-1} in bileşkesini uyguladık.)*

$(Iog)(x) = f^{-1}[h(x)]$

$g(x) = f^{-1}(4x+5)$ $\left(f(x) = 3x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3} \text{ tür.}\right)$

$= \dfrac{(4x+5)+1}{3}$

$= \dfrac{4x+6}{3}$ bulunur.

Sıra Sizde

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları için,
$g(x) = 2x - 3$ ve $(gof)(x) = 3x - 5$ olduğuna göre $f(x)$ i bulunuz.

28. Örnek

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları için
$g(x) = 2x + 3$ ve $(fog)(x) = 3x - 4$ olduğuna göre $f(x)$ i bulalım.

$(fog)(x) = 3x - 4 \Rightarrow f[g(x)] = 3x - 4$ tür. $f(2x + 3) = 3x - 4$ eşitliğinde x yerine $2x + 3$ ün tersi olan $\dfrac{x-3}{2}$ yi yazalım.

$f\left(2.\dfrac{x-3}{2} + 3\right) = 3.\dfrac{x-3}{2} - 4 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3x-17}{2}$ bulunur.

Sıra Sizde

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları için $f(x) = 3x - 1$ ve $(gof)(x) = 2x + 5$ olduğuna göre $g(x)$ i bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

a. ☐ $(fog)(x) = g[f(x)]$ tir.

b. ☐ $(fof)(x) = f(x)$ tir.

c. ☐ Gerçek sayılarda tanımlı herhangi iki fonksiyona bileşke işlemi uygulanabilir.

d. ☐ Bir fonksiyonun tersinin alınabilmesi için o fonksiyonun bire bir ve örten olması gereklidir.

2. $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = ax + b$ ve $g(x) = cx^2 + d$ fonksiyonları veriliyor. Bu fonksiyonların bileşkelerinin grafiklerinin karakter olarak f ve g fonksiyonlarından hangisinin grafiğine benzeyeceğini sebepleriyle açıklayınız.

3. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ ve $C = \{6, 7, 8\}$ kümeleri veriliyor.

$f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ olmak üzere "95.Şekil"de gösterilen f ve g fonksiyonları doğrusaldır. Buna göre,

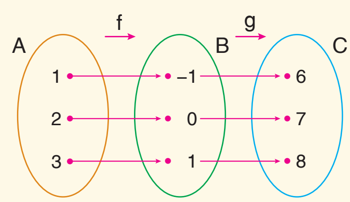
a. f ve g fonksiyonlarının kurallarını bulunuz.

b. gof fonksiyonunun kuralını bulunuz.

c. $(gof)(2)$ ve $(gof)(3)$ değerleri kaçtır?

d. $(gof)(a) = 6$ ise a kaçtır?

95. Şekil



4. Gerçek sayılarda tanımlanan $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = 1 - x$ ve $h(x) = 3x + 1$ fonksiyonlarını kullanarak aşağıdaki fonksiyonların kurallarını bulunuz.

a. $(fog)(x)$ **b.** $(gof)(x)$

c. $(goh)(x)$ **d.** $(hog)(x)$

e. $(foh)(x)$ **f.** $(hof)(x)$

5. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı $f(x) = 5 - 2x$ ve $g(x) = 3x + 1$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre,

a. $(f o g)(2)$ kaçtır?

b. $(g o f)(2)$ kaçtır?

6. Sınıfınızdaki öğrencilerin kümesi A, bu öğrencilerin adreslerinin kümesi B olsun. Sınıfınızdaki öğrencilerden ikisi ikiz kardeş ise,

a. A dan B ye tanımlı, öğrencileri adreslerine eşleyen bir fonksiyon yazılabilir mi? Neden?

b. B den A ya tanımlı, öğrencilerin adreslerini öğrencilere eşleyen bir fonksiyon yazılabilir mi? Neden?

c. a ve b seçeneklerinde belirtilen fonksiyonlar yazılabiliyorsa bunların bire bir ve örten olma özelliklerini inceleyiniz.

7. $A = \{1, 3, 5\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ olmak üzere $A \rightarrow B$ tanımlanan aşağıdaki fonksiyonları inceleleyerek bu fonksiyonlardan, tersi fonksiyon olanları "✓" işareti ile işaretleyiniz. Cevaplarınızı nedenleriyle açıklayınız.

a. .... $f_1 = \{(1, a), (3, b), (5, c)\}$

b. .... $f_2 = \{(3, a), (5, b), (1, c)\}$

c. .... $f_3 = \{(1, c), (3, c), (5, a)\}$

d. .... $f_4 = \{(1, a), (3, c), (5, b)\}$

e. .... $f_5 = \{(5, a), (3, b), (1, a)\}$

f. .... $f_6 = \{(1, c), (3, b), (5, a)\}$

8. Aşağıdaki fonksiyonların, tanımlı oldukları aralıklardaki terslerini bulup eşleştiriniz.

$f(x) = 2x$ •		• $f^{-1}(x) = x + 3$
$f(x) = x - 3$ •		• $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$
$f(x) = 2x + 1$ •		• $f^{-1}(x) = \dfrac{2x-1}{3}$
$f(x) = \dfrac{3x+1}{2}$ •		• $f^{-1}(x) = \dfrac{-5x+1}{2x-1}$
$f(x) = \dfrac{x+1}{2x+5}$ •		• $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2}$
		• $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{3}$

9. Gerçek sayılar kümesinde tanımlanan f, g ve h fonksiyonları için aşağıda istenenleri bulunuz.

a. $f(x-2)=3x+5$ ise $f(x)$ nedir?

b. $g(2x+4)=2-x$ ise $g(x)$ nedir?

c. $h\left(\frac{2-3x}{4}\right)=1-2x$ ise $h(x)$ nedir?

d. $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=3x+5$ ise $f(2)$ nedir?

e. $g(2x-3)=5x+4$ ise $g^{-1}(-6)$ nedir?

f. $h\left(\frac{1-x}{3}\right)=5-4x$ ise $h^{-1}(-3)$ nedir?

10. Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonu için $f(x)=3-2x$ ve $(fof)(a)=8$ olduğuna göre a kaçtır?

11. Gerçek sayılarda tanımlı $f(x)=3x-1$ ve $g(x)=2-x$ fonksiyonları için aşağıdakileri bulunuz.

a. $(fog)^{-1}(x)$

b. $(f^{-1}og)(x)$

c. $(fog^{-1})(x)$

d. $(fog^{-1})^{-1}(x)$

e. $(g^{-1}of)^{-1}(x)$

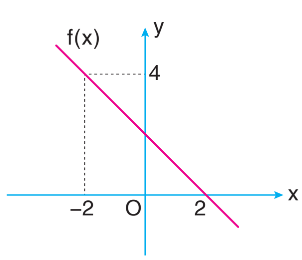
f. $(fog^{-1})(-1)$

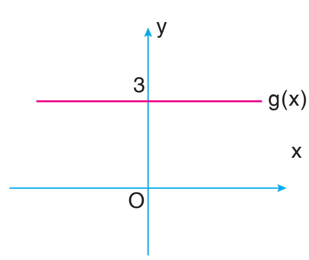
g. $(g^{-1}og)(-2)$

h. $(fof^{-1})^{-1}(-1)$

12. $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{2\}$, $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ ve $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+2$ fonksiyonları veriliyor. $(fog)^{-1}(m)=f^{-1}(-1)+g^{-1}(2)$ olduğuna göre m kaçtır?

13. Aşağıda grafiği verilen f ve g fonksiyonlarının (varsa) terslerinin grafiklerini çiziniz. Hangi fonksiyonun tersi de bir fonksiyondur?





14. "96. Şekil" de verilen f fonksiyonunun grafiğine göre aşağıda istenenleri bulunuz.

a. $(fof)(-3)$ **b.** $(fof)(1)$

c. $(fofof)(3)$ **d.** $(fofof)(-2)$

15. "97. Şekil" de f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre $(fog)^{-1}(3)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

16. Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için, $f^{-1}(6x-1) = 3x+1$ ve $g(x) = \frac{x+1}{2}$ dir. $(f^{-1}og)^{-1}(m) = -3$ olduğuna göre m aşağıdakilerden hangisidir?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

17. "98. Şekil" de f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, $(fofof)(2) + (\underbrace{fofo...of}_{2014\ tane})(0)$ toplamının değeri kaçtır?

A) 1 B) 0 C) –1 D) –5 E) –6

18. Gerçek sayılarda tanımlı, bire bir ve örten f ve g fonksiyonları için, $f^{-1}(4) = 6$ ve $g(3) = 4$ ise $(f^{-1}og)^{-1}(6)$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19. Gerçek sayılarda tanımlı, f ve g fonksiyonları için $g(x) = 3x-1$ ve $(f^{-1}og)^{-1}(x) = \frac{3-4x}{3}$ ise $f(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

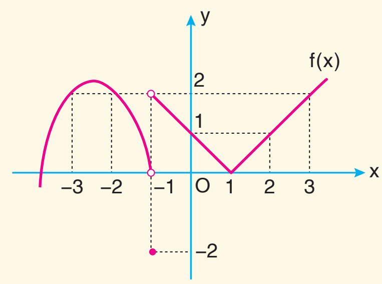
A) $2x+1$ B) $3-4x$ C) $1-x$

D) $2-4x$ E) $2x+3$

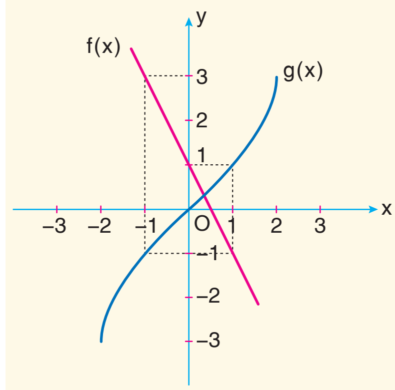
20. $f: \mathbb{R}-\{-m\} \to \mathbb{R}-\{-1\}$, $f(x) = \frac{-x}{x+m}$ ve $(fof)(x) = x$ olduğuna göre m kaç olmalıdır?

A) –4 B) –3 C) –2 D) –1 E) 1

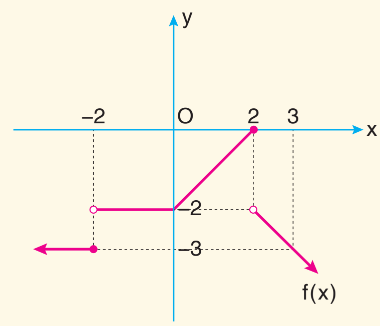
96. Şekil



97. Şekil



98. Şekil



2. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ olmak üzere $A \to B$ ye tanımlanan aşağıdaki ilişkilerden hangileri fonksiyondur?

a. $f_1 = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6)\}$

b. $f_2 = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3)\}$

c. $f_3 = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6)\}$

d. $f_4 = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6)\}$

2. $f(x) = |x - 3| + 4$ ve $h(x) = x^3 - x + 1$ fonksiyonu için $f(1)$ ve $h(-1)$ değerlerini bulunuz.

3. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ **b.** $g(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ **c.** $\sqrt{x+4}$

4. $\mathbb{R}$ de tanımlı $f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x < -1 \text{ ise} \\ 2 & , \quad -1 \le x < 2 \text{ ise} \\ (x-2)^2 + 1 & , \quad x \ge 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu için $\dfrac{f(-2)+f(0)}{f(4)}$ değeri kaçtır?

5. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (k + 2).x - m + 4$ fonksiyonu birim fonksiyondur. Buna göre $f(m + k)$ kaçtır?

6. $f(x) = (a - 3)x + 4$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre $f(a)$ kaçtır?

7. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f bir doğrusal fonksiyondur. $f(1) = 4$ ve $f(-2) = -2$ olduğuna göre $f(3)$ kaçtır?

8. $\mathbb{Z}$ de tanımlı aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri bire birdir?

a. $f(x) = x + 2$ **b.** $g(x) = x^2$

9. $\mathbb{Z}$ de tanımlı aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri içinedir?

a. $f(x) = 2x + 1$ **b.** $g(x) = x - 2$

10. Aşağıda boş bırakılan yerlere "tek" ya da "çift" kelimelerinden uygun olanı yazınız.

a. $f(-x) = -f(x)$ ise f fonksiyonu .... fonksiyondur.

b. Grafiği y eksenine göre simetrik olan bir fonksiyon .... fonksiyondur.

c. Bütün sabit fonksiyonlar .... fonksiyondur.

d. $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonu .... fonksiyon değildir.

11. $f(x)$ fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetriktir. $f(-x) + 4x^4 = 6x^2 - f(x) + 2$ olduğuna göre $f(-1)$ kaçtır?

12. $f(x) = (4a - 8)x^5 - (3b + 12)x^2 + a - 6$ fonksiyonu tek fonksiyon ise $a + b$ toplamı kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

2. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

13. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, -2, -3, -4\}$ ve

$f : A \to B$, $g : A \to B$ olmak üzere,

$f : \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4)\}$

$g : \{(1, -4), (2, -3), (3, -2), (4, -1)\}$

olduğuna göre aşağıda istenen fonksiyonların kurallarını bulunuz.

a. $2f$ **b.** $f + g$ **c.** $2f + g$

d. $f \cdot g$ **e.** $\dfrac{f}{g}$ **f.** $\dfrac{f}{f-2g}$

14. $\mathbb{R}$ de tanımlı, f ve g fonksiyonları için,

$f(x) = 2 - x$ ve

$(2g - f)(x) = 5x - 2$

olduğuna göre $g(2)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 10 E) 12

15. $\mathbb{R}$ de tanımlı, f ve h fonksiyonları için,

$f(x) = 3x + 1$ ve

$h(x) = x^2 - 1$

olduğuna göre $(foh)(-1)$ değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, olmak üzere,

$f(x) = 3x + m$ ve

$(fof)(x) = 9x + 8$

olduğuna göre m değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17. $\mathbb{R}$ de tanımlı, f ve k fonksiyonları için,

$f(x - 1) = 2x + 1$ ve

$k\left(\dfrac{5x+3}{2}\right) = x - 2$

olduğuna göre $(kof)(3)$ değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18. $\mathbb{R}$ de tanımlı, f ve k fonksiyonları için,

$f(x) = 3x - 1$ ve

$(fok)(x) = 4x + 5$

olduğuna göre $k(x)$ i bulunuz.

19. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f, k ve h fonksiyonları için aşağıdaki istenenleri bulunuz.

a. $f(x + 2) = 3x - 5$ ise $f(x)$ nedir?

b. $k(2x - 1) = x + 3$ ise $k(x)$ nedir?

c. $h\left(\dfrac{x-2}{2}\right) = 1 - x$ ise $h(x)$ nedir?

d. $f\left(\dfrac{x-1}{3}\right) = x + 4$ ise $f(2)$ nedir?

e. $k(2x - 3) = 5x + 4$ ise $k^{-1}(-6)$ nedir?

f. $h\left(\dfrac{1-x}{3}\right) = 5 - 4x$ ise $h^{-1}(-3)$ nedir?

20. Aşağıdaki fonksiyonların, tanımlı oldukları aralıklardaki terslerini bulup eşleştiriniz.

$f(x) = 3x$ •	• $f^{-1}(x) = x - 2$
$f(x) = x + 2$ •	• $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{5}$
$f(x) = \dfrac{2x-1}{3}$ •	• $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{2}$
$f(x) = \dfrac{x+1}{3x+4}$ •	• $f^{-1}(x) = \dfrac{-4x+1}{3x-1}$
	• $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3}$

21. Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonu için,

$f\left(\dfrac{2-a}{3x}\right) = 2x + 7$ ve

$f^{-1}(13) = a - 2$

olduğuna göre a kaçtır?

22. $\mathbb{R}$ de tanımlı, h ve g fonksiyonları için,

$(h^{-1}og)(x) = 2x + 7$ ve

$g(x) = 3x + 1$

olduğuna göre $h(x)$ i bulunuz.

23. $\mathbb{R}$ de tanımlı, f ve k fonksiyonları için,

$f(x) = 4x + 3$ ve

$k^{-1}(x) = 2x - 5$

olduğuna göre $(f^{-1}ok)^{-1}(x)$ i bulunuz.

24. $\mathbb{R}$ de tanımlı, h ve g fonksiyonları için,

$g(x) = 3x - 1$ ve

$(g^{-1}oh)(x) = 2x + 7$

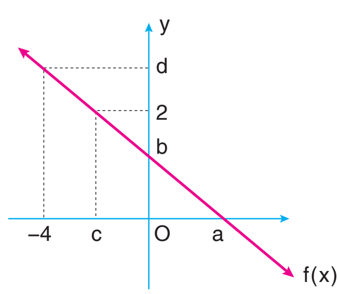
olduğuna göre $h(x)$ i bulunuz.

25. $\mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{2\}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ ve

$\mathbb{R}$ de tanımlı, $g(x) = x + 2$ fonksiyonları veriliyor.

$(fog)^{-1}(m) = f^{-1}(-1) + g^{-1}(2)$ olduğuna göre m kaçtır?

26.

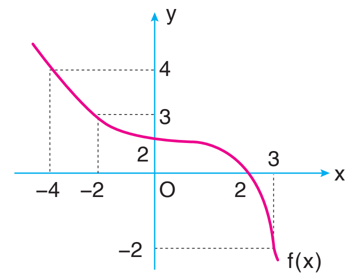


Yukarıdaki şekilde $f(x) = \dfrac{2-x}{2}$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre a + b + c + d toplamı kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

27.



Yukarıdaki şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre,

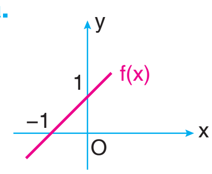
$f[f(a)] + f[f(2)] = 5$

denklemini sağlayan a değeri kaçtır?

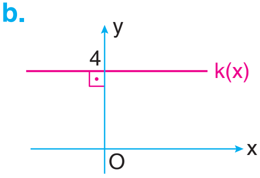
A) –4 B) –2 C) 0 D) 2 E) 3

28. Aşağıda gerçek sayılarda grafikleri verilen fonksiyonlardan tersi de fonksiyon olanların ters fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz. Fonksiyon grafiği ile tersinin grafiği aynı olanları belirleyiniz.

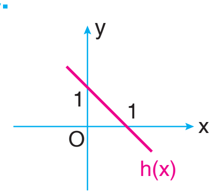
a.



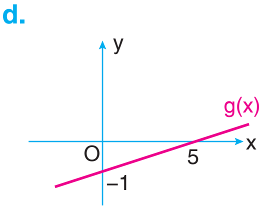
b.



c.



d.



29. $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{2ax+3}{2x-b}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre a + b toplamı kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

3. ÜNİTE

POLİNOMLAR

Neler Öğreneceğiz?

- Polinom kavramını ve polinomlarla işlemler yapmayı,
- Polinomları çarpanlarına ayırmayı,
- Polinom ve rasyonel denklemlerin çözüm kümelerini bulmayı öğreneceğiz.

Neden Öğrenmeliyiz?

Fonksiyonların özel bir türü olan polinomların matematikte ve ekonomide oldukça geniş bir uygulama alanı bulunmaktadır. Ekonomideki kullanımına örnek olarak bir ülkenin harcanabilir gelirinin hesaplanması verilebilir.

PROJE

Projenin Adı: Derin Dalış

Projenin Amacı: Rasyonel ifadelerin kimya bilimi ile ilişkilendirilmesi

• Genel Gaz Kanunu veya Charles Kanunu; P basınç, V hacim ve T sıcaklık olmak üzere; $\frac{P_1.V_1}{T_1} = \frac{P_2.V_2}{T_2}$ şeklinde formüle edilir. 1 indisi ilk durumu, 2 indisi ise son durumu belirtir.

Dalış yapmak üzere olan bir sporcunun ciğerlerinin oksijen kapasitesi 6,9 L (V_1) dir. Aşağıdaki basamakları takip ederek bu sporcunun daldığı zaman ciğerlerindeki oksijen hacminin nasıl değişeceğini araştırınız.

Projenin İçeriği

1. Deniz seviyesindeki hava basıncını, (P_1) atm *(atmosfer)* cinsinden bulunuz.
2. Sporcunun bulunduğu bölgede hava sıcaklığı (T_1) 24 °C olsun. Charles Kanunu'nu kullanabilmek için sıcaklığın Kelvin cinsinden bilinmesi gerekmektedir. Kelvin ve santigrat sıcaklık birimleri arasındaki bağıntıyı bulunuz. Sıcaklığı Kelvin birimi ile ifade ediniz.
3. Denizin herhangi bir derinliğindeki basınç, bu derinlikteki su basıncı ile deniz seviyesindeki hava basıncının toplamıdır. Su basıncı her 10 metrede 1 atm arttığına göre, **d** derinliğindeki toplam basıncı (P_2) veren bir ifade bulunuz.
4. Sporcunun dalış yapacağı denizde su sıcaklığının, inilen her 1 metre için 0,032 Kelvin derece düştüğünü varsayınız. Buna göre d derinliğindeki sıcaklığı (T_2) veren bir ifade bulunuz.
5. Charles Kanunu'nu kullanarak d derinliğinde dalgıcın ciğerlerindeki oksijen hacmini (V_2) veren bir rasyonel ifade bulunuz.
6. Hangi derinlikte, sporcunun ciğerlerindeki oksijenin hacmi deniz seviyesindekinin yarısıdır?
7. 100 metre derinlikte, dalgıcın ciğerlerindeki oksijen hacmi ne kadardır?

Projenin Sunumu: Araştırma ve çalışmalarınızın sonuçlarını ilgili resim ve canlandırmalarla zenginleştirip bir bilgisayar veya poster sunumu hazırlayabilirsiniz.

ÖNCEKİ BİLGİLERİNİ TEST ET

1. Aşağıdaki işlemleri yaparak cebirsel ifadelerin en sade hâllerini yazınız.

a. $2(2x-2)+4(x-7)$ **b.** $(x+3)-2(x-2)$ **c.** $3(4-x)+5(x+1)$

d. $4(3x-1)-(4-x)$ **e.** $4(-x+1)-2(x-1)$ **f.** $5(1-x^2)+(4x^2-1)$

2. Aşağıdaki cebirsel ifadeleri ortak çarpan parantezine alınız.

a. $12x+3x^2$ **b.** $4x^3-6x$ **c.** x^2+x^3

d. $4x^3+2x^2-6x$ **e.** $4x-8$ **f.** $3x-6x^3$

3. Aşağıda verilen tam kare şeklindeki cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a. x^2+2x+1 **b.** x^2-2x+1 **c.** x^2+4x+4

d. x^2+6x+9 **e.** $x^2-10x+25$ **f.** $x^2-20x+100$

4. Aşağıda verilen tam kare şeklindeki cebirsel ifadelerde eksik olan terimleri tamamlayınız.

a. x^2-4x+ ...... **b.** x^2- ...... $x+9$ **c.** x^2+ ...... $x+16$

d. x^2+16x+ ...... **e.** x^2+8x+ ...... **f.** x^2- ...... $x+49$

5. Aşağıda verilen iki kare farkı şeklindeki cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a. x^2-4 **b.** x^2-9 **c.** x^2-1

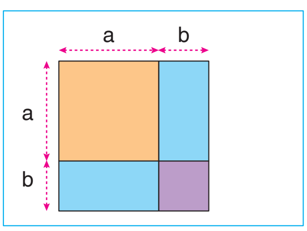
d. x^2-25 **e.** x^2-36 **f.** x^2-49

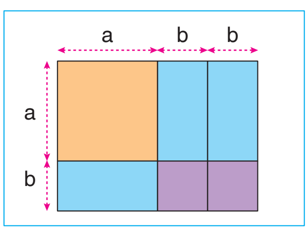
6. Aşağıda verilen cebirsel ifadeleri düzenleyerek iki kare farkı şeklinde yazınız.

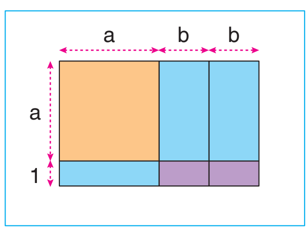
a. $(x-1)(x+1)$ **b.** $(x-2)(2+x)$ **c.** $(x+10)(x-10)$

d. $(5-x)(x+5)$ **e.** $(x+6)(x-6)$ **f.** $(x-8)(x+8)$

7. Aşağıda verilen modeller ile bu modellere ait cebirsel ifadeleri eşleştiriniz.







$(a+b).(a+2b)=a^2+3ab+2b^2$

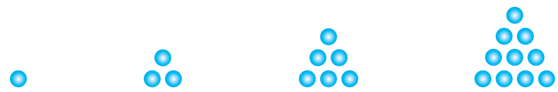
$(a+b).(a+b)=a^2+2ab+b^2$

$(a+1).(a+2b)=a^2+2ab+a+2b$

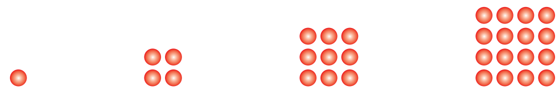
POLİNOM KAVRAMI VE POLİNOMLARLA İŞLEMLER

BÖLÜM 3.1

Polinom Kavramı



Terim Numarası	1.	2.	3.	4.	...
Terim	1	3	6	10	...



Terim Numarası	1.	2.	3.	4.	...
Terim	1	4	9	16	...

Birçoğu Pisagor'un yaşadığı dönemde ortaya atılan özel sayı örüntülerinden ikisi üçgensel ve karesel sayılardır.

Üçgensel sayılar; 1 , 3 , 6 , 10 , ..., karesel sayılar ise 1 , 4 , 9 , 16 , ..., şeklindedir.

Yukarıda modellenen sayı örüntüleri için x herhangi bir adımı göstermek üzere bu sayı örüntülerinin kuralları yazılabilir mi? (“1. Örnek”e bakınız.)

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ gerçek sayılar, n doğal sayı ve x değişken olmak koşulu ile

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

biçimindeki fonksiyonlara gerçek katsayılı ve bir değişkenli **polinom** (çok terimli) denir.

Bütün polinomlar, fonksiyonların özel bir türü olarak ele alınabilir.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ polinomunda;

- $a_0, a_1x, a_2x^2, \ldots, a_nx^n$ ifadelerinin her birine polinomun **terimleri**,
- $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçek sayılarına, ilgili terimlerin **katsayıları**,
- $a_r \in \mathbb{R}$ ve $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere, a_rx^r terimindeki x in üssü olan r ye, bu terimin **derecesi**,
- En büyük dereceli terimin katsayısı olan a_n katsayısına **başkatsayı**; değişken içermeyen a_0 terimine de **sabit terim** denir.

TERİMLER

- Polinom
- Polinomun derecesi
- Polinomun katsayıları
- Polinomun sabit terimi
- Sabit polinom
- Sıfır polinom
- Kalan teoremi
- Polinomun sıfırları

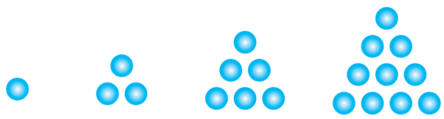
SEMBOL VE GÖSTERİMLER

- P(x)

1. Örnek

Sayıları sınıflandırmak veya onlara bazı özellikler atfetmek Pisagor'un yaşadığı dönemde oldukça popülerdi. Aşağıda bu sayılara örnek olacak üçgensel sayılar verilmiştir. Bu sayıların kuralını bulup bu kuralın bir polinom belirtip belirtmediğini bulalım.

Üçgensel sayılar; 1 , 3 , 6 , 10 , ... gibi sayılardır. Bu sayılara üçgensel sayılar denmesinin sebebi sayıların boncuklar yardımıyla modellenirken üçgensel bir yapı oluşturmalarıdır. Bu sayıları modelleyerek sayıların kuralını bulalım.



Terim Numarası	1.	2.	3.	4.	...	x
Terim	1	3	6	10	...	$\frac{x(x+1)}{2}$

Yukarıdaki sayı örüntüsünde görüldüğü gibi, x bir sayma sayısı olmak üzere, $\frac{x(x+1)}{2}=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$ ifadesi bir üçgensel sayı belirtir.

$P(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$ ifadesi ise ikinci dereceden tek değişkenli bir polinoma örnektir.

Sıra Sizde

"1. Şekil"de karesel sayıları modelleyen boncuklar gösterilmiştir. Buna göre bu sayıların kuralını bulunuz. Bulduğunuz kuralın bir polinom belirtip belirtmediğini açıklayınız.

2. Örnek

Aşağıdaki ifadelerden hangilerinin polinom olduğunu bulalım.

a. $P_1(x)=x^6-3x^2-2x^{-1}+1$

b. $P_2(x)=4x^3-\sqrt{3x}-4x+5$

c. $P_3(x)=x^2+x^{\frac{3}{5}}$

d. $P_4(x)=\sqrt{3}x^4-\frac{1}{2}x+7$

e. $P_5(x)=5x^{10}-\frac{3}{x^2}-1$

TARİH KÖŞESİ

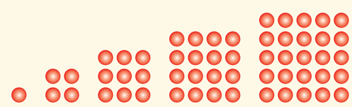
René Descartes
(Rön Dekart)

(1596 – 1650)
(Temsilî resimdir.)

Cebirsel ifadelerde sabitler için a, b, c gibi alfabenin ilk harflerini; bilinmeyenler için de x, y gibi alfabenin son harflerini kullanan René Descartes, bir polinomun pozitif işaretli köklerinin sayısını bulmaya yarayan bir işaretler kuralı ortaya koymuştur.

Kaynak: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Descartes.html

1. Şekil



a. $-2x^{-1}$ teriminin üssü -1 ve $-1 \notin \mathbb{N}$ olduğundan, $P_1(x)$ bir polinom değildir.

b. $\sqrt{3x} = (3x)^{\frac{1}{2}}$ teriminde x in üssü $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ olduğundan, $P_2(x)$ bir polinom değildir.

c. $x^{\frac{3}{5}}$ teriminin üssü $\frac{3}{5}$ ve $\frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$ olduğundan, $P_3(x)$ bir polinom değildir.

d. $P_4(x)$ ifadesinde her bir terimdeki değişkenlerin üsleri birer doğal sayı olduğundan, $P_4(x)$ bir polinomdur.

e. $-\frac{3}{x^2} = -3.x^{-2}$ teriminde x in üssü -2 ve $-2 \notin \mathbb{N}$ olduğundan, $P_5(x)$ bir polinom değildir.

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadelerden hangilerinin polinom olduğunu bulunuz.

a. $P_1(x) = x^5 + 2x^2 - \sqrt{5}x - 1$

b. $P_2(x) = 2x^4 + \sqrt{9x} + x + \frac{1}{2}$

c. $P_3(x) = 10$

d. $P_4(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x^3 - \frac{x}{2} - 2$

e. $P_5(x) = x^6 + \frac{3}{x^3} + x$

f. $P_6(x) = x + 1$

3. Örnek

$P(x) = 2x^5 - 3x^7 + \sqrt{5}x^4 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{x}{5} + 8$ polinomunun terim sayısını, derecesini, sabit terimini, başkatsayısını, 1 ve 3. dereceden terimlerinin katsayılarını bulalım.

Polinomun; terim sayısı 6, derecesi 7, sabit terimi 8 ve başkatsayısı -3 tür.

Derecesi 1 olan terimin katsayısı $-\frac{1}{5}$ tir.

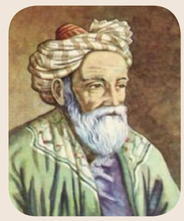
Derecesi 3 olan terim yoktur. Bu durumda, 3. dereceden terimin katsayısı 0 dır.

Sıra Sizde

$P(x) = 7x^7 - x^9 + \sqrt{2}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{3}x^2 - \frac{3x}{2} - 2$ polinomunun terim sayısını, derecesini, sabit terimini, başkatsayısını, 1 ve 3. dereceden terimlerinin katsayılarını bulunuz.

TARİH KÖŞESİ

Ömer Hayyam



(1050 – 1123)

(Temsilî resimdir.)

Polinomların köklerinin belirlenmesi veya cebirsel denklemlerin çözümü, matematiğin en eski problemlerindendir. 1079 lu yıllarda Ömer Hayyam üçüncü dereceden polinomların bir sınıflandırmasını yapmıştır. İkinci dereceden polinomların grafikleri olan parabolleri ve çemberleri kesiştirerek üçüncü dereceden denklemleri geometrik yöntemlerle çözebilmekteydi.

Kaynak: https://islamansiklopedisi.org.tr/omer-hayyam

4. Örnek

$P(x) = x^6 - x^{\frac{7}{m-2}} + x^{m-4} + x$ ifadesinin bir polinom belirtmesi için m sayısının kaç olması gerektiğini bulalım.

P(x) bir polinom ise her bir terimin üssü doğal sayı olmalıdır. Buna göre,

$\frac{7}{m-2} \in \mathbb{N}$ ve $m - 4 \in \mathbb{N}$ olmalıdır.

$m - 4 \in \mathbb{N}$ ise, $m - 4 \geq 0 \Rightarrow m \geq 4$ ... **(I)** koşulu sağlanmalıdır.

$\frac{7}{m-2} \in \mathbb{N}$ ise, $m - 2$ ifadesi 7 nin pozitif tam sayı bölenleri olmalıdır.

O hâlde, $m - 2 = 1$ veya $m - 2 = 7$

$m = 3$ veya $m = 9$ ... **(II)** olur.

I ve **II** numaralı koşullardan $m = 9$ bulunur.

Sıra Sizde

$P(x) = 6x^{\frac{12}{n+2}} - 5x^{n-1} + \sqrt{2} - 2$ ifadesi bir polinom belirttiğine göre bu polinomun derecesinin en çok kaç olabileceğini bulunuz.

- Bir polinomun sabit terimi bulunurken değişkeninin yerine 0 (sıfır) yazılır. P(x) polinomunun sabit terimi P(0) değerine eşittir.
- Bir polinomun katsayılarının toplamı bulunurken değişkeninin yerine 1 yazılır. P(x) polinomunun katsayılar toplamı P(1) değerine eşittir.

DİKKAT

Gerçek katsayılı her polinom aynı zamanda gerçek sayılarda tanımlı bir fonksiyon belirtir.

5. Örnek

$P(x) = -2x^2 + 5x + 3$ polinomunun sabit terimini ve katsayılar toplamını bulalım.

$P(x) = -2x^2 + 5x + 3$ polinomunun sabit terimi 3 tür. Katsayılar toplamı ise $-2 + 5 + 3 = 6$ dır.

Bir diğer yoldan; P(0) değerini hesaplayarak polinomun sabit terimini, P(1) değeri ile de polinomun katsayılar toplamını bulabiliriz. Buna göre,

$P(0) = -2.0^2 + 5.0 + 3 = 3$

$P(1) = -2.1^2 + 5.1 + 3 = 6$ bulunur.

Sıra Sizde

$P(x) = 6x^3 - 5x^2 - 3x$ polinomunun sabit terimi ve katsayılar toplamını bulunuz.

6. Örnek

$P(x) = (x^2 - 2x + 2)^3 + 2$ polinomunun çift ve tek dereceli terimlerinin katsayılarının toplamını ayrı ayrı bulalım.

Polinomun çift dereceli terimlerinin katsayılar toplamını $\frac{P(1)+P(-1)}{2}$ işlemini yaparak bulabiliriz.

$x = 1$ için $P(1) = (1^2 - 2.1 + 2)^3 + 2 = 1 + 2 = 3$,

$x = -1$ için $P(-1) = [(-1)^2 - 2.(-1) + 2]^3 + 2 = 125 + 2 = 127$ dir.

Buna göre, $\frac{P(1)+P(-1)}{2} = \frac{3+127}{2} = 65$ bulunur.

Tek dereceli terimlerin katsayılar toplamını ise $\frac{P(1)-P(-1)}{2}$ işlemini yaparak bulabiliriz. O hâlde tek dereceli terimlerin katsayılar toplamı,

$\frac{P(1)-P(-1)}{2} = \frac{3-127}{2} = -62$ bulunur.

Sıra Sizde

$P(x) = (x^5 - x^3 + 2x - 1)^2 - 1$ polinomunun çift ve tek dereceli terimlerinin katsayılarının toplamını ayrı ayrı bulunuz.

Sabit Polinom, Sıfır Polinomu ve İki Polinomun Eşitliği

ETKİNLİK

- $P(x) = x^2 - 2x + 1$, $Q(x) = (x + 2)^2 - 3$, $R(x) = 3$, $T(x) = \frac{1}{2}$, $V(x) = 0$ polinomları verilmiş olsun.
- Yukarıdaki polinomların aynı zamanda birer fonksiyon olduğunu dikkate alarak $x = -3$, $x = -2$, $x = 1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ ve $x = 3$ değerleri için alacağı değerleri bulunuz.
- Verdiğiniz tüm x değerleri için sıfır değerini alan polinomu belirleyiniz. Belirlediğiniz polinom her $x \in \mathbb{R}$ değeri için de sıfır değerini alır mı? Arkadaşlarınızla tartışarak açıklayınız.

- Verdiğiniz tüm x değerleri için daima sabit bir değer alan polinomları belirleyiniz. Bu polinomların her $x \in \mathbb{R}$ değerleri için de aynı sabit değeri alıp almayacağını arkadaşlarınızla tartışarak açıklayınız.
- Verdiğiniz tüm x değerleri için hep aynı değerleri alan polinomları belirleyiniz. Bu polinomların her $x \in \mathbb{R}$ değerleri için de eşit değerler alıp almayacağını arkadaşlarınızla tartışarak açıklayınız.

➢ Etkinlik basamaklarından yararlanarak sabit fonksiyonla, her $x \in \mathbb{R}$ için aynı değeri alan polinom arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

➢ $Q(x)$ polinomunda $(x+2)^2$ açılımını yaparak $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarını karşılaştırınız. İki polinomun eşit olması için gerekli olan şartları belirleyiniz.

➢ $V(x)$ polinomunun derecesinin kaç olabileceğini arkadaşlarınızla tartışarak açıklayınız.

Sabit Polinom, Sıfır Polinomu	
Sabit Polinom, Sıfır Polinomu	• $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ polinomunda, $a_n = a_{n-1} = ... = a_2 = a_1 = 0$ olduğunda elde edilen $P(x) = a_0$ polinomu **sabit polinomdur**. • P(x) polinomunda $a_n = a_{n-1} = ... = a_2 = a_1 = a_0 = 0$ olduğunda elde edilen $P(x) = 0$ polinomu **sıfır polinomudur**.

7. Örnek

$P(x) = 3$, $Q(x) = -2$, $R(x) = \frac{1}{2}$, $T(x) = 0$ polinomlarının derecelerini bulalım.

$P(x) = 3.x^0$, $Q(x) = -2.x^0$, $R(x) = \frac{1}{2}.x^0$, şeklinde yazılabileceğinden bu polinomların derecesi 0 dır.

$T(x) = 0$ polinomunun derecesini bulalım.

$T(x) = 0.x^3 = 0.x^0 = 0.x^2$ gibi sayısız şekilde yazılabileceğinden bu polinomun derecesi belirlenemez.

DİKKAT

Sıfır polinomunun derecesi belirlenemez.

Sıra Sizde

Aşağıdaki polinomlardan kaç tanesinin derecesinin 0 (sıfır) olduğunu bulunuz.

a. $P_1(x) = -1$ **b.** $P_2(x) = x$

c. $P_3(x) = 0$ **d.** $P_4(x) = \sqrt{5}$

8. Örnek

$P(x) = (a+2)x^3 - 2bx + 3$ polinomu sabit polinom olduğuna göre $a - b$ değerini bulalım.

$P(x) = (a+2)x^3 - 2bx + 3$ polinomu sabit polinom olduğundan x^3 ve x içeren terimlerinin katsayıları 0 olmalıdır.

Bu durumda $a + 2 = 0$ ve $-2b = 0$ olur.

$a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$ ve $-2b = 0 \Rightarrow b = 0$ dır.

Bu durumda, $a - b = -2 - 0 = -2$ bulunur.

Sıra Sizde

$P(x) = (a - 2b)x^5 - (2 - b)x^2 + 3$ polinomu sabit polinom olduğuna göre $a + b$ değerini bulunuz.

İki Polinomun Eşitliği	$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ve $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_2x^2 + b_1x + b_0$ polinomları için $P(x) = Q(x) \Leftrightarrow n = m$ ve $a_n = b_m, a_{n-1} = b_{m-1}, ..., a_1 = b_1, a_0 = b_0$ olmalıdır.

9. Örnek

$P(x) = \frac{3}{4}x^4 - \sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}x - 1$ ve $Q(x) = \frac{3}{4}x^4 - \sqrt{2}x^3 + 3\sqrt{2}x^2 - 1$ polinomlarını karşılaştırarak polinomların eşit olup olmadıklarını bulalım.

$Q(x)$ polimomunda x^3 lü terimin katsayısı $-\sqrt{2}$ dir. $P(x)$ polinomunda x^3 lü terim olmadığından katsayısı 0 dır. x^3 lü terimlerin katsayıları farklıdır.

Benzer şekilde, x^2 li terimlerin katsayıları da eşit değildir.

Bu durumda, $P(x) \neq Q(x)$ tir.

DİKKAT

İki polinomun eşit olabilmesi için aynı dereceli terimlerinin katsayılarının eşit olması gerekir.

Sıra Sizde

$P(x) = \frac{2}{3}x^5 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^a + 3x - 7$ ve $Q(x) = \frac{2}{3}x^5 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^3 + 3x - 7$ polinomları için $P(x) \neq Q(x)$ olduğuna göre, a nın hangi değeri alamayacağını bulunuz.

10. Örnek

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= (2a-1)x^3 - 3x^2 + 2m - 5 \\ Q(x) &= 5x^n - (p+1)x^2 - 1 \end{aligned}\right\}$$ **P(x) ve Q(x) polinomları birbirine**

eşit ise a $\left(a \neq \frac{1}{2}\right)$, m, n ve p değerlerini bulalım.

$P(x) = Q(x)$ ise $n = 3$ tür. Ayrıca polinomların aynı dereceli terimlerinin katsayıları eşit olmalıdır. Buna göre;

$2a - 1 = 5 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3,$

$-(p + 1) = -3 \Rightarrow p + 1 = 3 \Rightarrow p = 2,$

$2m - 5 = -1 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$ bulunur.

Sıra Sizde

$P(x) = (a - 2)x^3 + 4x - b - 2$ ve $Q(x) = 2x^3 + (m - 2)x^2 + (n - 1)x - 3$ polinomları eşit olduğuna göre, $a.b - m.n$ değerini bulunuz.

Polinomlarla İşlemler

Polinomlarla Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Kart yarışı ya da karting, motor sporlarının bir dalıdır. Tek kişilik arabalarla yapılan bu sporda saatte 140 km/sa. hıza ulaşabilen küçük yarış arabaları kullanılır. Yanda görülen fotoğrafta bir yarıştaki iki sporcu gösterilmiştir.

Bu sporculardan öndeki ve arkadakinin saniye türünden belirli bir zaman (x) içerisinde alabilecekleri yollar metre türünden sırası ile $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x$ ve $Q(x) = x^2 + 2x$ polinomlarıyla ifade edilebilmektedir. Sizce aynı anda aynı noktadan başlayan bu iki yarışçının 10 saniye sonra aralarındaki mesafeyi nasıl bulabiliriz?

Polinomlarda toplama veya çıkarma işlemleri yapılırken aynı dereceli terimlerin katsayıları toplanır veya çıkarılır, aynı dereceli terime katsayı olarak yazılır. Polinomlarda bulunan farklı dereceli terimler işaretlerine dikkat edilerek sonuca yazılır.

11. Örnek

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= 3x^5+2x^3+\frac{2x^2}{3}+\frac{x}{2}+4 \\ Q(x) &= -x^5+\frac{2}{3}x^4+x^3+\frac{x^2}{3}-x+2 \end{aligned}\right\}$$ **polinomları için $P(x)+Q(x)$ polinomunu bulalım.**

$$P(x)+Q(x)=\left(3x^5+2x^3+\frac{2x^2}{3}+\frac{x}{2}+4\right)+\left(-x^5+\frac{2}{3}x^4+x^3+\frac{x^2}{3}-x+2\right)$$

$$=(3-1)x^5+\frac{2}{3}x^4+(2+1)x^3+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)x^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)x+4+2$$

$$=2x^5+\frac{2}{3}x^4+3x^3+x^2-\frac{1}{2}x+6 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$P(x)=2x^3-4x^2-2$ ve $Q(x)=3x^4-2x^2+5x+3$ polinomları için $P(x)+Q(x)$ polinomunu bulunuz.

PROJE

111. sayfadaki projede "Projenin İçeriği" bölümündeki ilk adımı gerçekleştirebilirsiniz.

12. Örnek

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= 2\sqrt{3}x^4-5x^3+x^2-2 \\ Q(x) &= \sqrt{3}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{2}{3}x^2+3 \end{aligned}\right\}$$ **polinomları için $P(x)-Q(x)$ polinomunu bulalım.**

$$P(x)-Q(x)=\left(2\sqrt{3}x^4-5x^3+x^2-2\right)-\left(\sqrt{3}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{2}{3}x^2+3\right)$$

$$=\left(2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)x^4+\left(-5-\frac{1}{2}\right)x^3+\left(1+\frac{2}{3}\right)x^2-2-3$$

$$=\sqrt{3}x^4-\frac{11}{2}x^3+\frac{5}{3}x^2-5 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$P(x)=x^4-x^2+5$ ve $Q(x)=4x^4-3x^2+2x-2$ polinomları için $P(x)-Q(x)$ polinomunu bulunuz.

> Bir $P(x)$ polinomunun derecesi n ise bu durum $der[P(x)]=n$ şeklinde gösterilir.

13. Örnek

$P(x) = 6x^5 - 7x^3 - 8x^2 - x - 1$ ve $Q(x) = -x^4 + x^3 + 4x + 5$ polinomları veriliyor. $P(x) + Q(x)$ ve $P(x) - Q(x)$ polinomlarının derecelerini belirleyelim.

$$P(x) + Q(x) = 6x^5 - x^4 + (-7 + 1)x^3 - 8x^2 + (-1 + 4)x + -1 + 5$$
$$= 6x^5 - x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 3x + 4 \text{ tür.}$$

Buna göre, $der[P(x) + Q(x)] = 5$ tir.

$$P(x) - Q(x) = 6x^5 - 7x^3 - 8x^2 - x - 1 - (-x^4 + x^3 + 4x + 5)$$
$$= 6x^5 - 7x^3 - 8x^2 - x - 1 + x^4 - x^3 - 4x - 5$$
$$= 6x^5 + x^4 - 8x^3 - 8x^2 - 5x - 6 \text{ dır.}$$

Buna göre, $der[P(x) - Q(x)] = 5$ tir.

Sıra Sizde

$P(x) = (a - 1)x^4 - x^2 + 3x - 3$ ve $Q(x) = (b + 2)x^3 + x - 1$ polinomları veriliyor. $P(x) + Q(x)$ ve $P(x) - Q(x)$ polinomlarının dereceleri 2 olduğuna göre, $a + b$ toplamını bulunuz.

14. Örnek

$P(x)$ bir polinom olmak üzere; $P(x + 1) + P(x - 1) = 4x - 6$ ise $P(x)$ polinomunu bulalım.

$P(x + 1)$ ve $P(x - 1)$ polinomlarının toplamı birinci dereceden $4x - 6$ polinomu ise $P(x) = ax + b$ şeklinde birinci dereceden bir polinomdur. Polinomlar fonksiyonların özel bir türü olarak düşünülebilir. Bu yüzden fonksiyonlardaki bileşke işlemine benzer olarak,

$P(x) = ax + b$ ise

$P(x + 1) = a(x + 1) + b = ax + a + b$ ve

$P(x - 1) = a(x - 1) + b = ax - a + b$ elde edilir.

$$P(x + 1) + P(x - 1) = ax + a + b + ax - a + b$$
$$= 2ax + 2b \text{ olur.}$$

$$2ax + 2b = 4x - 6 \Rightarrow 2a = 4 \text{ ve } 2b = -6$$
$$\Rightarrow a = 2 \text{ ve } b = -3 \text{ tür.}$$

O hâlde, $P(x) = 2x - 3$ polinomu bulunur.

DİKKAT

Dereceleri farklı olan iki polinomun toplamının veya farkının derecesi, derecesi büyük olan polinomun derecesine eşittir.

Sıra Sizde

$P(x)$ bir polinom olmak üzere; $P(x+3)+P(x-2)=2x+3$ ise $P(x)$ polinomunu bulunuz.

15. Örnek

İnternet üzerinden e-ticaret yapan küçük bir işletme, ihraç ettiği bir ürünün x adedini $11x$ TL ye mal etmektedir. Bu ürünün x adedinin satışından firmanın geliri ise $0{,}03x^2+250$ ifadesi ile bulunabilmektedir.

Buna göre;

a. Ürünün satışından elde edilen kârı ifade eden polinomu bulalım.

b. İşletme bu üründen 1000 tane satarsa işletmenin kaç TL kâr elde edeceğini bulalım.

a. İşletmenin kârını veren polinom, ürünlerin satışından elde edilen gelir polinomu ile maliyet polinomlarının farkı ile bulunur.

Buna göre kâr polinomu,

$P(x) = 0{,}03x^2 + 250 - 11x$

$= 0{,}03x^2 - 11x + 250$ dir.

b. İşletmenin üründen 1000 tane sattığında elde edeceği kâr, kâr polinomunun $x = 1000$ için alacağı değere eşittir.

Buna göre,

$P(x) = 0{,}03x^2 - 11x + 250$ polinomunda,

$P(1000) = 0{,}03(1000)^2 - 11.1000 + 250$

$= 30000 - 11000 + 250$

$= 19250$ dir.

O hâlde işletmenin kârı 19250 TL dir.

Sıra Sizde

"15. Örnek"te verilen bilgilere göre işletmenin sadece 100 tane ürün sattığında nasıl bir durumla karşı karşıya kalacağını açıklayınız.

Polinomlarla Çarpma İşlemi

ETKİNLİK

"2. Şekil" de gösterilen dikdörtgenler prizması şeklindeki kutunun ayrıtları $x+1$, $x-1$ ve $2x$ br dir.

- Bu kutunun hacmini veren matematiksel ifadeyi polinomların çarpımı şeklinde yazınız.
- Kutunun hacmi için yazdığınız ifadedeki çarpma işleminin sonucunun polinom olup olmadığını açıklayınız.
- Kutunun hacmini gösteren polinomun derecesi kaçtır? Tahmin ediniz.

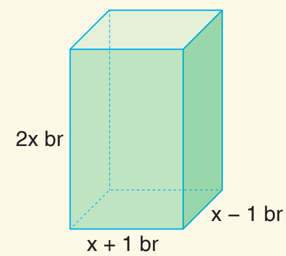
➢ Kutunun hacmini gösteren polinomu ve bu polinomun derecesini bularak tahmininizle karşılaştırınız.

➢ Herhangi iki polinomun çarpımının sonucunda oluşan polinomun derecesiyle çarpılan polinomların dereceleri arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.

HATIRLAYALIM

Dik prizmalarlarda hacim, prizmanın en, boy ve yüksekliğinin çarpımıyla bulunur.

2 . Şekil



- $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının çarpımı bulunurken $P(x)$ in bütün terimleri $Q(x)$ in bütün terimleri ile çarpılır. Elde edilen terimlerin toplamı $P(x).Q(x)$ polinomunu verir.
- $der[P(x)]=m$ ve $der[Q(x)]=n$ ise $der[P(x).Q(x)]=m+n$ olur.

16. Örnek

$P(x)=3x^2-2x$, $Q(x)=2x^3-1$ ise $P(x).Q(x)$ polinomunu ve bu polinomun derecesini bulalım.

$$P(x).Q(x)=(3x^2-2x).(2x^3-1)$$
$$=3x^2.2x^3+3x^2.(-1)+(-2x).2x^3+(-2x).(-1)$$
$$=6x^5-3x^2-4x^4+2x \text{ bulunur.}$$

$der[P(x).Q(x)]=5$ tir. Ayrıca $P(x).Q(x)$ polinomunun derecesi $der[P(x).Q(x)]=der[P(x)]+der[Q(x)]$ olduğundan $2+3=5$ işlemi yapılarak da bulunabilir.

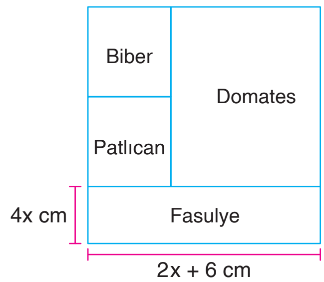
Sıra Sizde

$P(x)=x^3+2x^2$, $Q(x)=-x^4-x+1$ ise $P(x).Q(x)$ polinomunu ve bu polinomun derecesini bulunuz.

17. Örnek

Domates, biber, patlıcan ve fasulye gibi sofralarımızda en sık kullandığımız sebzeler yaz sebzeleridir. Ancak günümüz şartlarında ılıman koşullar oluşturup bu tür sebzeleri mevsimleri dışında da üretebilmek için seracılık gelişmiştir. Seracılık yapan Süleyman Bey'in kare şeklinde bir bölge üzerine inşa ettiği serasının krokisi "3. Şekil" de gösterilmiştir. Sera içerisindeki biber ve patlıcan ekili bölgeler birbirine eş kareler olduğuna göre domates ekili bölgenin alanını ifade eden polinomu bulalım.

3. Şekil



"4. Şekil" deki ABCD kare olduğundan, $|BC| = |AB|$ dir. AFKE ve FGLK da eş kareler olduğundan

$|AB| = |AF| + |FG| + |GB|$ $\quad$ *($|FG| = |AF|$ dir.)*

$|AB| = 2.|AF| + |GB|$

$2x + 6 = 2.|AF| + 4x$

$2.|AF| = 6 - 2x$

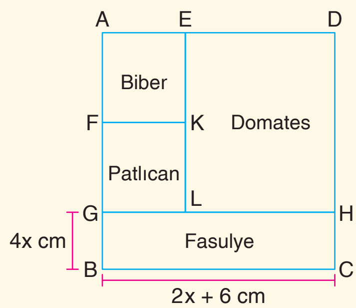
$|AF| = 3 - x$ cm dir.

$|AF| = |AE| = 3 - x \Rightarrow |ED| = |AD| - |AE|$

$= 2x + 6 - (3 - x)$

$= 3x + 3$ cm dir

4 . Şekil



Son olarak $|AG| = |EL|$ olduğundan $|EL| = 2.(3 - x) = 6 - 2x$ cm dir. Buna göre domates ekili bölgenin alanını ifade eden polinom

$A(ELHD) = |EL|.|ED|$

$= (6 - 2x).(3x + 3)$

$= 6.3x + 6.3 + (-2x).3x + (-2x).3$

$= 18x + 18 - 6x^2 - 6x$

$= -6x^2 + 12x + 18 \text{ cm}^2$ bulunur.

Sıra Sizde

"17. Örnek" in çözümünde kullandığımız isimlendirmelere göre, $|FG| = 2x + 1$ cm ve $|ED| = 4x + 12$ cm olduğunu düşünerek fasulye ekili alanı ifade eden polinomu bulunuz.

Polinomlarla Bölme İşlemi

ETKİNLİK

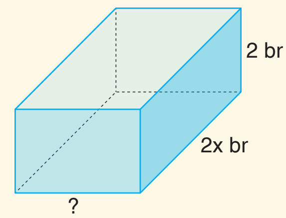
"5. Şekil" de gösterilen dikdörtgenler prizması şeklindeki kutunun hacmi $4x^2 + 8x$ birim küptür.

- Verilenlere göre prizmanın verilmeyen ayrıtını bulmak için yapılması gereken işlemi yazınız.
- Prizmanın verilmeyen ayrıtını bulmak için yazdığınız işlemin sonucunun polinom olup olmadığını açıklayınız.
- Prizmanın verilmeyen ayrıtını belirten polinomun derecesini tahmin ediniz.

➢ Prizmanın verilmeyen ayrıtını belirten polinomu ve derecesini bularak tahminlerinizle karşılaştırınız.

➢ Etkinlik basamaklarından çıkardığınız sonuçlara göre polinomlarda bölme işleminde yer alan bölünen, bölen, bölüm ve kalan polinomlarının dereceleri arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

5 . Şekil



Yandaki bölme işlemine göre;

$P(x)$, bölünen; $Q(x)$, bölen; $R(x)$, bölüm ve $K(x)$, kalandır.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} - \quad & R(x) \\ \hline K(x) & \end{array}$$

- $der[P(x)] \geq der[Q(x)]$ tir.
- $Q(x) \neq 0$ olmak üzere $der[K(x)] < der[Q(x)]$ tir.
- $P(x) = Q(x).R(x) + K(x)$ eşitliğindeki $K(x) = 0$ ise $P(x)$, $Q(x)$ e tam bölünür.

18. Örnek

$P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$ polinomunu, $Q(x) = x + 1$ polinomuna bölelim.

Bölme işleminde ilk olarak bölüme $2x^2$ yazılır. Böylece $x + 1$ ile çarpıldığında $2x^3$ ile başlayan bir polinom elde edilir. Bu polinom $P(x)$ ten çıkarılır. Sonraki adımda ise elde edilen $-3x^2 + 3x - 4$ polinomunun $-3x^2$ terimini elde etmek için bölüme $-3x$ yazılır. $-3x$ ile $x + 1$ çarpılarak elde edilen polinom $-3x^2 + 3x - 4$ ten çıkarılır. Kalan $6x - 4$ için bölüme $+6$ yazılıp $x + 1$ ile çarpılınca elde edilen $6x + 6$, $6x - 4$ ten çıkarılınca sonuç -10 olur. -10 un derecesi $x + 1$ den küçük olduğu için bölme işlemi tamamlanır.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 + 3x - 4 & x + 1 \\ \cline{2-2} - \quad 2x^3 + 2x^2 \qquad\qquad & 2x^2 - 3x + 6 \\ \cline{1-1} -3x^2 + 3x - 4 & \\ - \quad -3x^2 - 3x \quad\;\; & \\ \cline{1-1} 6x - 4 & \\ - \quad 6x + 6 & \\ \cline{1-1} -10 & \end{array}$$

Bu bölme işlemini

$\underbrace{2x^3 - x^2 + 3x - 4}_{\text{bölünen}} = \underbrace{(x+1)}_{\text{bölen}}\,\underbrace{(2x^2 - 3x + 6)}_{\text{bölüm}} + \underbrace{(-10)}_{\text{kalan}}$ şeklinde ifade edebiliriz.

Sıra Sizde

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ polinomunu, $Q(x) = x + 1$ polinomuna bölünüz.

19. Örnek

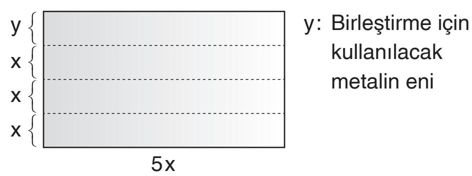
Uzunluğu $5x$ cm olan bir soba borusunu yapmak için $(15x^2 + 20x)$ cm^2 metal levhaya (saca) ihtiyaç duyan bir demirci hesaplamasında boruyu birleştirirken kullanılacak bir miktar levhayı da hesaba katmıştır. Tamamlanmış borunun tabanını oluşturan dairenin çevresi $3x$ cm ise demircinin boruyu birleştirirken kullandığı metal levhanın eninin kaç santimetre olduğunu bulalım.

Cevabı bulmak için levhanın alanını ifade eden $(15x^2 + 20x)$ cm^2 polinomunu, borunun uzunluğunu ifade eden $5x$ polinomuna bölmeliyiz:

$$\begin{array}{r|l} 15x^2 + 20x & 5x \\ \cline{2-2} \underset{+}{\mp} 15x^2 & 3x + 4 \\ \cline{1-1} 20x & \\ \underset{+}{\mp} 20x & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

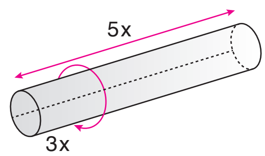
6. Şekil

İhtiyaç Duyulan Metal Levha



7. Şekil

Tamamlanmış Boru



O hâlde $\underbrace{15x^2 + 20x}_{\text{Borunun alanı}} = \overbrace{5x}^{\text{Borunun uzunluğu}} . \underbrace{(3x + 4)}_{\text{Borunun genişliği}}$ olur.

Bu durumda $3x + y = 3x + 4$ olduğundan $y = 4$ cm bulunur.

Sıra Sizde

Bir demirci yukarıdaki fotoğrafta gösterilen dirseği (boru köşesini) oluşturmak istiyor. Bunun için alanı $(6x^2 + 11x + 4)$ cm^2 lik sac kullanarak bir boru üretecek sonra da bu boruyu bükerek dirsek yapacaktır. Kullanacağı sacın eni $(3x + 4)$ cm olduğuna göre sacın uzunluğunu bulunuz.

$P(x) \neq 0$ olmak üzere **$der[P^n(x)] = n.der[P(x)]$** dir. $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ bir polinom olmak üzere **$der\left[\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right] = der[P(x)] - der[Q(x)]$** dir.

20. Örnek

$P(x) = 6x^4 - x^3 + 4x^2 + 5x$ polinomunu, $Q(x) = 3x - 2$ polinomuna bölüp bölümün derecesini bulalım.

Yandaki bölme işlemini,

$$6x^4 - x^3 + 4x^2 + 5x = (3x-2).\underbrace{(2x^3 + x^2 + 2x + 3)}_{\text{Bölüm}} + 6$$ biçiminde ifade

edebiliriz.

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 - x^3 + 4x^2 + 5x & 3x - 2 \\ \cline{2-2} -\ 6x^4 - 4x^3 & 2x^3 + x^2 + 2x + 3 \\ \cline{1-1} 3x^3 + 4x^2 + 5x & \\ -\ 3x^3 - 2x^2 & \\ \cline{1-1} 6x^2 + 5x & \\ -\ 6x^2 - 4x & \\ \cline{1-1} 9x & \\ -\ 9x - 6 & \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

Bölünenin 4. dereceden ve bölenin 1. dereceden polinom olduğu bir bölme işleminde bölüm polinomunun derecesi $4 - 1 = 3$ bulunur.

Sıra Sizde

$P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 1$ polinomunun, $Q(x) = x + 3$ polinomuna bölünmesi sonucunda elde edilecek bölüm polinomunun derecesini tahmin ediniz. Daha sonra bölme işlemini yaparak tahmininizi değerlendiriniz.

21. Örnek

Bir $P(x)$ polinomu $2x + 2$ ile bölündüğünde bölüm $x^3 - 2x^2$ ve kalan 1 dir. Buna göre $P(x)$ polinomunu bulalım.

$$\underbrace{P(x)}_{\text{bölünen}} = \underbrace{(2x+2)}_{\text{bölen}} . \underbrace{(x^3 - 2x^2)}_{\text{bölüm}} + \underbrace{1}_{\text{kalan}}$$ dir.

$P(x) = (2x^4 - 4x^3 + 2x^3 - 4x^2) + 1$

$P(x) = 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 1$ bulunur.

Sıra Sizde

Bir $P(x)$ polinomu $x - 3$ ile bölündüğünde bölüm $x^4 + 3x^3$ ve kalan -3 tür. Buna göre $P(x)$ polinomunu bulunuz.

22. Örnek

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları için $der[P^2(x).Q(x)] = 8$ ve $der\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = 1$ olduğuna göre $der[P(x)]$ i bulalım.

$der[P(x)] = a$ ve $der[Q(x)] = b$ olsun. Buna göre,

$der[P^2(x)] = 2a$ ve $der[P^2(x).Q(x)] = 2a + b$ olur.

O hâlde $2a + b = 8$ dir. $der\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = 1$ ise $a - b = 1$ olur.

$$\begin{array}{rl} & 2a + b = 8 \\ + & \;\;a - b = 1 \\ \hline & 3a = 9 \end{array}$$

$3a = 9 \Rightarrow a = 3$ bulunur. Buna göre $der[P(x)] = 3$ tür.

Sıra Sizde

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları için $der[P(x).Q^3(x)] = 10$ ve $der\left[\frac{Q(x)}{P(x)}\right] = 2$ olduğuna göre $der[Q(x)]$ i bulunuz.

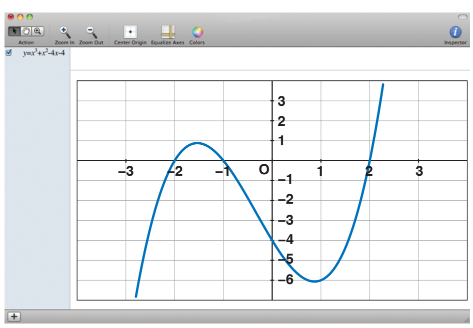
Bölme İşlemi Yapmadan Kalan Bulma

23. Örnek

$P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ polinomunun sıfırlarını (köklerini) grafik çizerek bulalım.

Verilen polinomun grafiğini çizim programı kullanarak çizelim. "8. Şekil"de gösterilen grafiğin x ekseninin kestiği noktalar polinomun sıfırları ($P(x) = 0$ olduğu noktalar) dır. Buna göre $x = -2$, $x = -1$ ve $x = 2$ noktaları $P(x)$ polinomunun sıfırlarıdır.

8 . Şekil



DİKKAT

$P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ polinomunun $x = -2$ sıfırı için $(x - (-2)) = (x + 2)$; $x = -1$ sıfırı için $(x - (-1)) = (x + 1)$ ve $x = 2$ sıfırı için de $(x - 2)$ şeklinde birer çarpanı olduğuna dikkat ediniz.

Sıra Sizde

$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ polinomunun sıfırlarını (köklerini) grafik çizim programı kullanarak bulunuz.

24. Örnek

$P(x) = x^2 - 4x - 1$ polinomunun sıfırlarını bulalım.

İkinci dereceden $P(x)$ polinomunun sıfırlarını $P(x) = 0$ denklemini tam kareye tamamlayarak bulalım.

$$P(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$$
$$x^2 - 4x - 1 + 5 = 0 + 5$$
$$x^2 - 4x + 4 = 5$$
$$(x-2)^2 = 5$$
$$\sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{5}$$
$$|x-2| = \sqrt{5} \Rightarrow x - 2 = \sqrt{5} \quad \text{veya} \quad x - 2 = -\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow x = 2 + \sqrt{5} \quad \text{veya} \quad x = 2 - \sqrt{5} \text{ tir.}$$

Sıra Sizde

$P(x) = x^2 + 2x - 4$ polinomunun sıfırlarını bulunuz.

ETKİNLİK

$P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7$, $Q(x) = 2x + 4$ ve $T(x) = x^2 + 3$ polinomlarını dikkate alarak aşağıdaki etkinlik basamaklarını uygulayınız.

- $P(x)$ polinomunu $Q(x)$ polinomuna bölerek kalanını bulunuz.
- $Q(x) = 0$ denklemini sağlayan x değerini bularak bu sayıyı $P(x)$ polinomunda x yerine koyarak $P(x)$ in aldığı değeri bulunuz.
- Etkinliğin birinci uygulama basamağında bulduğunuz kalan ile $P(x)$ in bir önceki basamakta aldığı değeri karşılaştırınız.

➢ Etkinlik basamaklarından yararlanarak bir $P(x)$ polinomunun $ax + b$ gibi birinci dereceden bir ifadeye bölümünden elde edilen kalanın bölme işlemi yapılmadan nasıl bulunabileceğini açıklayınız.

Kalan Teoremi

- Bir $P(x)$ polinomunun $ax + b$ ile bölümünden elde edilen kalanı bulmak için $P(x)$ polinomunda, x yerine bölen polinomun kökü olan $-\frac{b}{a}$ $\left(ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}\right)$ yazılır.

  Başka bir ifadeyle $P(x) = (ax + b).B(x) + K$ eşitliğinde $x = -\frac{b}{a}$ alınırsa $P\left(-\frac{b}{a}\right) = K$ olur.
- $P(a) = 0 \Leftrightarrow x - a$, $P(x)$ polinomunun bir çarpanıdır.

PROJE

111. sayfadaki projede "Projenin İçeriği" bölümündeki ikinci adımı gerçekleştirebilirsiniz.

25. Örnek

$P(x) = 3x^2 + 4x - 5$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalanı iki farklı yöntemle bulalım.

Yandaki bölme işleminde bulduğumuz 15 kalanını bölme işlemi yapmadan aşağıdaki şekilde de bulabiliriz.

$P(x) = 3x^2 + 4x - 5$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalan K, bölüm $B(x)$ olsun. Bu durumda $P(x) = (x-2).B(x) + K$ olur. Bu eşitlikte x yerine 2 $(x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2)$ yazılırsa $P(2) = K$ elde edilir.

$x = 2$ için $P(2) = 3.2^2 + 4.2 - 5$

$K = 12 + 8 - 5$

$K = 15$ bulunur.

$$\begin{array}{r|l} \not{3x^2} + 4x - 5 & x - 2 \\ \cline{2-2} -\ \not{3x^2} - 6x & 3x + 10 \\ \cline{1-1} \not{10x} - 5 & \\ -\ \not{10x} - 20 & \\ \cline{1-1} \text{kalan} \leftarrow \quad 15 & \end{array}$$

Sıra Sizde

$P(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalanı iki farklı yolla bulunuz.

26. Örnek

$P(x) = x^4 - 2x^3 + x - 3$ polinomu, $Q(x) = 2x - 1$ ile bölündüğünde elde edilecek kalanı bulalım.

$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ olduğundan $P(x)$ polinomunda $x = \frac{1}{2}$ yazılırsa kalanı bulmuş oluruz.

$$\text{Kalan} = P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2.\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} - 3$$

$$= \frac{1}{16} - 2.\underset{(2)}{\frac{1}{8}} + \underset{(8)}{\frac{1}{2}} - \underset{(16)}{\frac{3}{1}}$$

$$= \frac{1 - 4 + 8 - 48}{16} = -\frac{43}{16} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

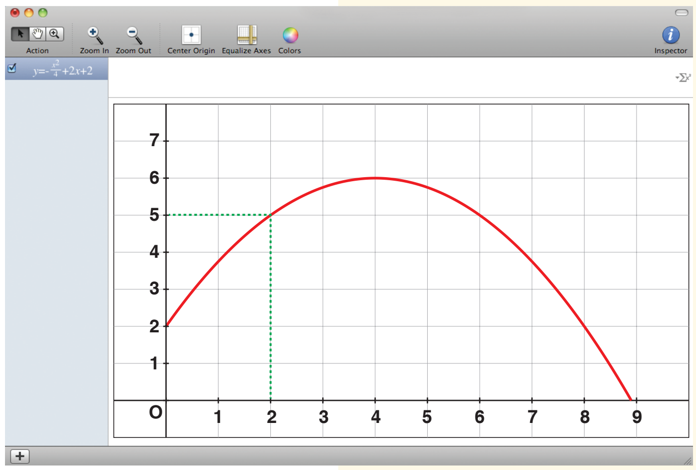
$P(x) = x^5 - 4x^3 + 1$ polinomu, $Q(x) = x - 2$ ile bölündüğünde elde edilecek kalanı bulunuz.

27. Örnek

Voleybol, file ile ikiye bölünmüş bir sahada altışar kişilik iki takım tarafından topla oynanan bir spordur. Takımlar kazandıkları her sayının ardından oyunu servis atışlarıyla başlatırlar. Yandaki görselde servis atışı yapan oyuncunun attığı topun yüksekliği, x saniye türünden zamanı göstermek üzere $P(x) = -\frac{x^2}{4} + 2x + 2$ polinomuyla ifade edilmektedir. Buna göre polinomun $x - 2$ ile bölümünden kalanı bulalım. Bulduğumuz sonucu yorumlayalım.

Topun izlediği yolun yani $P(x)$ polinomunun grafiğini çizim programı kullanarak "9. Şekil"deki gibi çizebiliriz.

9. Şekil



$P(x) = -\frac{x^2}{4} + 2x + 2$ polinomunun $x - 2$ ile bölümünden kalan K, bölüm $B(x)$ olsun. Bu durumda $P(x) = (x - 2).B(x) + K$ eşitliğini yazabiliriz.

Bu eşitlikte x yerine 2 $(x-2=0 \Rightarrow x=2)$ yazılırsa $P(2) = K$ elde edilir.

$x = 2$ için

$$P(2) = -\frac{2^2}{4} + 2.2 + 2$$

$K = -1 + 4 + 2 = 5$ bulunur.

Polinomun $x - 2$ ile bölümünden kalanı bulmak için $P(x)$ polinomunda $x = 2$ yazarak $P(2) = 5$ değerine ulaştık.

Bu da bize topun 2. saniyede yerden 5 metre yüksekte olduğunu göstermektedir.

Sıra Sizde

"27. Örnek"te verilen polinomun $x - 10$ ile bölümünden kalanı bulunuz. Bulduğunuz sonucu yorumlayınız.

28. Örnek

$P(x) = ax^3 - 3x^2 + 2ax - 1$ polinomunun $Q(x) = x - 2$ ile tam bölünebilmesi için a nın kaç olması gerektiğini bulalım.

$P(x)$ polinomunun $Q(x)$ e tam bölünebilmesi için kalanın 0 olması gereklidir.

Buna göre,

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ olup $P(2) = 0$ olacaktır.

$P(2) = 0 \Rightarrow a.2^3 - 3.2^2 + 2.a.2 - 1 = 0$

$$12a - 13 = 0$$

$$a = \frac{13}{12} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$P(x) = x^5 - 4x^2 + 3ax$ polinomu, $Q(x) = x - 1$ ile tam bölünebilmektedir. Buna göre a nın değerini bulunuz.

29. Örnek

$P(x+2) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5$ tir. Buna göre $P(x)$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden elde edilecek kalanı bulalım.

$P(x)$ polinomunun $x + 1$ ile bölündüğünde elde edilecek kalanı bulmak için $P(-1)$ i bulmalıyız. $P(x+2)$ polinomunda x yerine -3 yazarsak $P(-1)$ i bulmuş oluruz.

$$P(x+2) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5$$

$$P(-3+2) = 3.(-3)^4 - 2.(-3)^3 + (-3)^2 - 5$$

$$P(-1) = 3.81 - 2.(-27) + 9 - 5$$

$$P(-1) = 301 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$P(x-3) = 4x^4 - 3x^3 + 2x + 2$ polinomu veriliyor. Buna göre $P(x)$ polinomunun $x + 4$ ile bölümünden elde edilecek kalanı bulunuz.

30. Örnek

$P(2x+1) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ polinomu veriliyor. Buna göre $P(x+2)$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden elde edilecek kalanı bulalım.

$P(x+2)$ polinomunun $x + 1$ ile bölündüğünde elde edilecek kalanı bulmak için x yerine -1 yazarız.

$x = -1 \Rightarrow P(x+2) = P(-1+2) = P(1)$ olur.

O hâlde $P(1)$ i bulmalıyız. $P(1)$ i bulmak için $P(2x+1)$ de x yerine 0 yazarız.

$x = 0$ için,

$P(2x+1) = x^3 - 2x^2 + x - 1 \Rightarrow P(2.0+1) = 0^3 - 2.0^2 + 0 - 1$

$\Rightarrow P(1) = -1$ dir.

O hâlde $P(x+2)$ polinomu $x+1$ ile bölündüğünde elde edilen kalan -1 dir.

Sıra Sizde

$P(3x-1) = 2x^3 - 3x^2 + x + 1$ polinomu veriliyor. Buna göre $P(3-x)$ polinomunun $x-1$ ile bölümünden elde edilecek kalanı bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen tablodaki boş kutuları fonksiyonlara göre doldurunuz.

Fonksiyon	Polinom mu? (E veya H)	Polinomun Derecesi	Polinomun Başkatsayısı	Polinomun Sabit Terimi	Polinomun Katsayılar Toplamı
$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 4$	E	4	3	4	6
$f(x) = 4x^3 - \sqrt{2}\,x^2 + 5$					
$f(x) = 3$					
$f(x) = 2\sqrt{x} - 2$					
$f(x) = 4x^2 - \frac{2}{x} + 1$					
$f(x) = x^3 - 3x^4 - 1$					
$f(x) = 5 - \sqrt[3]{x}$					

2. Derecesi 5 olan ve üç terimden oluşan bir polinom yazınız.

3. Aşağıdaki polinomlardan sabit polinom ya da sıfır polinomu olanları belirleyiniz.

a. $P(x) = \frac{3}{4}$

b. $P(x) = \frac{0}{\sqrt{3}}$

c. $P(x) = \sqrt{2}\,x$

d. $P(x) = 1 - x$

e. $P(x) = \frac{x}{5} - 3x^2 + \sqrt{5}$

f. $P(x) = \sqrt{3} + 2\sqrt{5}$

g. $P(x) = x - x(x-1)$

h. $P(x) = (1 - x^3).\frac{0}{2\sqrt{5}}$

4. $P(x) = 3mx^5 - (1 - 2b)x^4 + (c + 3)x^3 - 4x^2 - 1$ ve

$Q(x) = \dfrac{2a+3}{5} - 3x^4 + (m - 1)x^5 + \dfrac{2n}{3}x^2$ polinomları birbirine eşit olduğuna göre a, b, c, m, n değerlerini bulunuz.

5. Aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

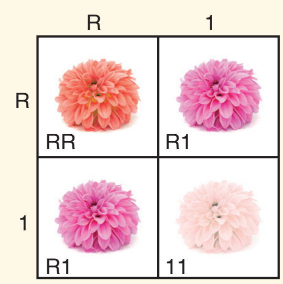
a. ☐ $P(x) = (a - 1)x^2 + (b + 2)x - c + 3$ polinomunun sıfır polinomu olması için $a + b + c = 0$ olmalıdır.

b. ☐ $P(x) = 5x^2 - 3x^{\frac{14}{m-1}} + 14$ ifadesi bir polinom ise m nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı 28 dir.

c. ☐ $P(x) = (2a - 4)x^2 + (b + 1)x + \sqrt{3} + 1$ polinomunun sabit polinom olması için $a + b = 3$ olmalıdır.

6. Belli bir özelliğe sahip bir çiçeğin ebeveynlerinden kalıtımla kazanacakları genleri R ve 1 olsun. $(R + 1)^2$ ifadesinin açılımı olan polinomun terimleri yeni oluşan çiçeğin olası gen çiftlerini gösterir. $(R + 1)^2$ ifadesini polinom şeklinde yazınız. Bu polinomun katsayılar toplamını bulunuz.

***10.* Şekil**



7. Aşağıda verilen polinomlara göre $P(x) + Q(x)$ ve $P(x) - Q(x)$ polinomlarını bulunuz.

a. $P(x) = 5x^3 - x + 1$

$Q(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 1$

b. $P(x) = -x^7 + 3x^5 - 8x + 7$

$Q(x) = 2x^7 - x^6 + \dfrac{1}{3}x^5 - 8$

8. İnternet üzerinden e-ticaret yapan küçük bir işletme, bir ürünün x adedinin satışından $10x$ TL gelir elde etmektedir. Bu ürünün x adedinin firmaya olan maliyeti ise $0{,}02x^2 + 500$ ifadesi ile bulunabilmektedir. Buna göre;

a. Ürünün satışından elde edilen kârı ifade eden polinomu bulunuz.

b. Firma bu üründen 200 tane satarsa elde edeceği kâr kaç TL olur?

9. $P(x) + P(x + 1) = 4x + 6$ olduğuna göre $P(x)$ polinomu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x + 2$ B) $x + 3$ C) $2x + 2$ D) $2x + 3$ E) $3x + 2$

10. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$, $Q(x) = x^2 - 5x$ ve $R(x) = x - 1$ ise aşağıda verilen işlemlerin sonuçlarını, karşısında verilenler arasından bularak eşleştiriniz.

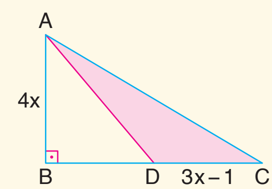
$3P(x) - Q(x).R(x)$ •	• $2x^4 - 6x^3 + 8x^2 + x - 1$
$2P(x) - x^2.Q(x)$ •	• $-x^5 - 3x^3 - x^2 + x$
$P(x).R(x) - x.Q(x)$ •	• $-x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 2$
$x^3.Q(x) - x.P(x).R(x)$ •	• $5x^3 - 3x^2 - 5x + 3$
	• $x^5 - x^2 - x + 1$

11. $2x^2.(2x-1).(x^3+3x^2-4)$ çarpımından elde edilen polinomda, x^3 lü terimin katsayısı kaçtır?

12. $(2x^3-3).(ax+b) = x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ olduğuna göre $a+b$ nin değeri nedir?

13. "11. Şekil"de boyalı bölgenin alanı için bir polinom oluşturunuz. Bu polinomu kullanarak $x = 2$ için boyalı bölgenin alanını bulunuz.

11 . Şekil



14. Aşağıda verilen $P(x)$ polinomlarının $Q(x)$ polinomlarına bölümünden elde edilen bölümleri ve kalanları bulunuz.

a. $P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 + 1$, $Q(x) = x + 3$

b. $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 4$, $Q(x) = 2x - 2$

c. $P(x) = 2x^4 - 2x^3 + x$, $Q(x) = x + 1$

15. Aşağıda verilen $P(x)$ polinomlarının $Q(x)$ polinomlarına bölümünden elde edilen bölüm polinomunun kaçıncı dereceden olduğunu karşılarından bularak eşleştiriniz.

$P(x) = 5x^5 - 2x^9 + x^3 - 5$, $Q(x) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 + 4$ •	• 1
$P(x) = 3x^4 - 3x^2 + 7x - 5$, $Q(x) = 2x - 5$ •	• 2
$P(x) = x^6 - 7x^4 - x + 4$, $Q(x) = x^4 - 2x^3 + x - 7$ •	• 3
$P(x) = x^6 - 1$, $Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$ •	• 4
	• 5

16. Bir bölme işleminde bölen $-x+1$, bölüm $x^2 + 3x$ ve kalan 3 ise bölünen nedir?

17. Bir fabrika, ürettiği bir ürünün x tanesinin toplam maliyetini $x^3 + 2x^2 + 5x$ TL olarak hesaplamaktadır. Toplam maliyetin üretilen ürün sayısına bölünerek bulunan ortalama maliyeti gösteren ifadeyi bulunuz.

18. Aşağıdaki tabloyu verilen polinomlara göre doldurunuz.

Polinomlar	der[P(x)]	der[Q(x)]	der[P(x) + Q(x)]	der[P(x).Q(x)]	$der\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right]$	der[$P^2(x)$]	der[$Q(x^3)$]
$P(x) = x^6 + x^4 - x^2 - 1$ $Q(x) = x^4 - 1$							
$P(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1$ $Q(x) = x^2 - 2x - 1$							

19. $x - 2$ ile bölündüğünde elde edilen kalanı 7 olan bir polinom bulunuz.

20. $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ polinomunda $a + b + c + d + e + f = 0$ ise bu polinomun $x - 1$ ile tam bölündüğünü gösteriniz.

21. Aşağıdaki $P(x)$ polinomlarının $Q(x)$ polinomlarına bölündüğünde elde edilen kalanları karşı sütundan bularak eşleştiriniz.

P(x)	Q(x)
$2x^3 - x^2 + 1$	$x - 3$
$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x$	$x - 2$
$-x^6 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 1$	$x + 1$
$x^7 - x^5 - 1$	$x - 1$
$x^4 - x^2 - x - 4$	$x + 2$

Kalan
5
55
10
46
–1
–10

22. Dikdörtgen şeklindeki bir tarlanın alanı $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, kısa kenar uzunluğu ise $x + 1$ polinomu ile ifade ediliyor. Buna göre tarlanın uzun kenarını belirten polinomu bulunuz.

BÖLÜM 3.2

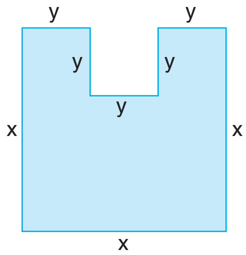
POLİNOMLARIN ÇARPANLARA AYRILMASI

Ortak Çarpan Parantezine Alarak Çarpanlara Ayırma

Yüzme veya süs amaçlı yapılan havuzlarda su sızdırmazlık büyük önem taşır. Sızdırmayı önlemek ve genelde havuzlara mavi renk vermek amacıyla havuzun dibi ve yan duvarları bir çeşit kaplama malzemesi olan fayanslarla döşenir.

"12. Şekil"de derinliği 2 metre olan bir havuzun üstten görünüşü verilmiştir. Sizce bu havuzun sadece duvarlarına döşenecek fayansın alanını hesaplamak isteyen proje sorumlusu bu hesaplamayı farklı şekillerde yapabilir mi?

12. Şekil

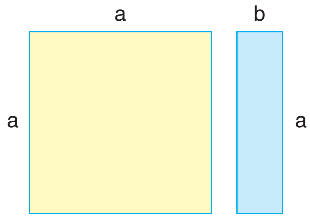


TERİMLER

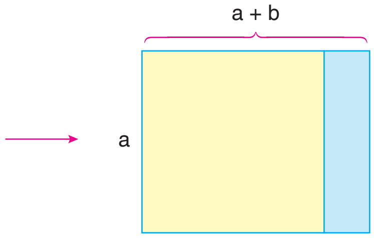
- Polinomun çarpanları
- Özdeşlikler
- Değişken değiştirme

ETKİNLİK

13. Şekil



14. Şekil



"13. Şekil"de bir kenar uzunluğu a br olan bir kare ile kenar uzunlukları a br ve b br olan dikdörtgen, "14. Şekil"de ise "13. Şekil"deki dikdörtgen ve karenin birleştirilmesiyle oluşan dikdörtgen çizilmiştir.

- "13. Şekil"deki karenin ve dikdörtgenin alanını veren ifadeleri yazınız.
- "14. Şekil"deki dikdörtgenin alanını veren ifadeyi yazınız.
- "13. Şekil"deki kare ile dikdörtgenin alanlarının toplamı ile "14. Şekil"deki dikdörtgenin alanını karşılaştırınız.

➢ Etkinlik basamaklarından yararlanarak "13. Şekil" ve "14. Şekil"deki şekillerin alanları için bulunan ifadeler arasındaki ilişkiyi arkadaşlarınızla tartışarak ulaştığınız sonucu açıklayınız.

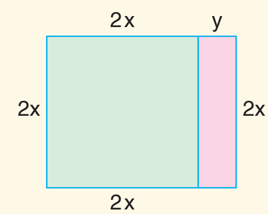
Verilen bir ifadede ortak terimler varsa ifade bu ortak terimlerin parantezine alınarak çarpanlarına ayrılabilir. Örneğin,

$ax + bx - cx = x(a + b - c)$ dir.

1. Örnek

"15. Şekil" deki dikdörtgenin alanını iki farklı biçimde ifade edelim.

15. Şekil



Yeşil karenin alanı: $2x \, . \, 2x = 4x^2$
Pembe dikdörtgenin alanı: $2x \, . \, y$
} Tüm alan: $4x^2 + 2xy$

Büyük dikdörtgenin alanı: $2x(2x + y)$

Bu iki ifade aynı alanı belirttiğinden;

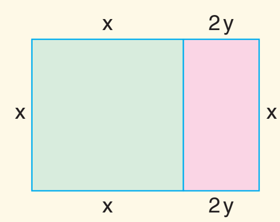
$4x^2 + 2xy = 2x(2x + y)$ dir.

$4x^2 + 2xy$ ifadesi $2x$ parantezine alındığında $2x(2x + y)$ olur.

Sıra Sizde

"16. Şekil" deki dikdörtgenin alanını iki farklı biçimde ifade ediniz.

16. Şekil



2. Örnek

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıralım.

a. $6x^2 - 9$ **b.** $8a^3x^2 - 12a^2x^3$

c. $2x(a - b) - y(a - b)$ **d.** $(x + 2)(1 - 2b) + 2b - 1$

a. $6x^2 - 9$ ifadesinde $6x^2$ ve 9 u bölen en büyük sayı 3 tür. $6x^2$ ve 9 u bölen ortak değişken yoktur. Bu durumda ifadeyi 3 parantezinde yazabiliriz:

$6x^2 - 9 = 3(2x^2 - 3)$ olur.

b. $8a^3x^2 - 12a^2x^3$ ifadesinde iki terimin de ortak çarpanı $4a^2x^2$ dir. Buna göre $8a^3x^2 - 12a^2x^3 = 4a^2x^2(2a - 3x)$ olur.

c. $2x(a - b) - y(a - b)$ ifadesinde her iki terimin de ortak çarpanı $(a - b)$ dir. Buna göre $2x(a - b) - y(a - b) = (a - b)(2x - y)$ olur.

DİKKAT

Ortak çarpan parantezine almak; çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini tersine çevirmek gibi düşünülebilir.

d. $(x+2)(1-2b)+2b-1$ ifadesinde $2b-1$ ifadesini -1 parantezine alırsak $2b-1=-1(1-2b)$ olur. Buna göre

$$
\begin{aligned}
(x+2)(1-2b)+2b-1 &= (x+2)(1-2b)-(1-2b)\\
&= (1-2b)(x+2-1)\\
&= (1-2b)(x+1) \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a. $15a^2-5a$

b. $8a^2b^2-4ab^2-12b^2$

c. $x(x-y)+y(y-x)$

d. $(x+1)(1-x)+x-1$

PROJE

111. sayfadaki projede “Projenin İçeriği” bölümündeki üçüncü adımı gerçekleştirebilirsiniz.

Gruplandırarak Çarpanlara Ayırma

Verilen bir ifadenin tüm terimlerinde ortak bir çarpan bulunamıyorsa ifade gruplandırılarak her grup kendi içinde çarpanlarına ayrılır.

Gruplar ortak çarpan parantezine alındığında ifade çarpanlarına ayrılmış olur.

$ax+by+ay+bx=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$

3. Örnek

$2x+6+xy+3y$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

$2x+6+xy+3y$ ifadesinde bütün terimlerin ortak çarpanı yoktur. Bu durumda, ortak çarpanı olan terimleri gruplandırıp ortak çarpan parantezine alarak,

$2x+2.3+xy+3y=2(x+3)+y(x+3)$ ifadesini elde ederiz.

Bu ifade tekrar ortak çarpan parantezine alınabilir. Buna göre,

$2(x+3)+y(x+3)=(x+3)(2+y)$ elde edilir.

O hâlde $2x+6+xy+3y=(x+3)(2+y)$ olur.

DİKKAT

Gruplandırma işleminden sonra oluşan terimlerde ortak çarpan bulunmuyorsa gruplandırma yanlış yapılmış demektir. Bu durumda gruplandırmayı yeniden yapmak gerekir.

Sıra Sizde

x^3-2x^2+2x-4 ifadesini çarpanlarına ayırınız.

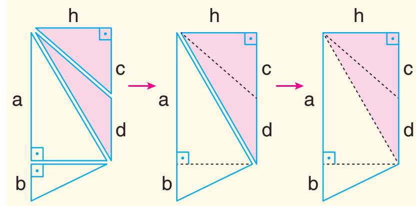
DÜŞÜNCE KUTUSU

17, 18 ve 19. şekillerdeki boyalı alanları kullanarak $\frac{a.h}{2}+\frac{b.h}{2}+\frac{c.h}{2}+\frac{d.h}{2}$,

$\frac{(a+b).h}{2}+\frac{(c+d).h}{2}$ ve $\frac{(a+b+c+d).h}{2}$

ifadelerinin eşit olduğunu gösteriniz.

17. Şekil 18. Şekil 19. Şekil



4. Örnek

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıralım.

a. $mx + ny + my + nx$ **b.** $x^4 - 4 + 2x^3 - 2x$

c. $mn(a^2 + b^2) - ab(m^2 + n^2)$

a. $mx + ny + my + nx$ ifadesinde ortak çarpanı olan terimleri gruplandıralım:

$$\underbrace{mx + my} + \underbrace{ny + nx} = m(x + y) + n(y + x)$$

$$= (x + y)(m + n) \text{ olur.}$$

b. $x^4 - 4 + 2x^3 - 2x$ ifadesinde ortak çarpanı olan terimleri gruplandıralım:

$$\underbrace{x^4 + 2x^3} - \underbrace{2x - 4} = x^3(x + 2) - 2(x + 2)$$

$$= (x + 2)(x^3 - 2)$$

c. $mn(a^2 + b^2) - ab(m^2 + n^2)$ ifadesini düzenleyerek ortak çarpanları belirleyelim.

$$mn(a^2 + b^2) - ab(m^2 + n^2) = mna^2 + mnb^2 - abm^2 - abn^2$$

$$= ma(na - bm) - nb(an - bm)$$

$$= (na - bm)(ma - nb) \text{ olur.}$$

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a. $a^2 + xb + xa + ab$ **b.** $m^4n - m^3n + m^2n - mn$

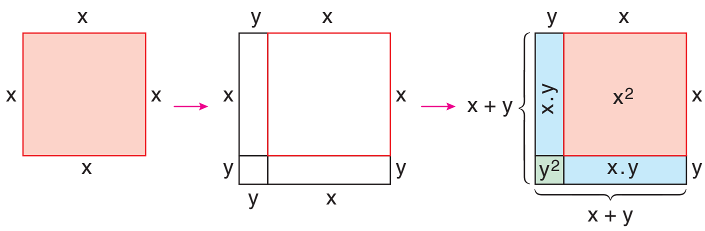
c. $x(a + y) + x(x + y) + y(a - x)$

Özdeşlik Kullanarak Çarpanlara Ayırma

ETKİNLİK

I. “20. Şekil”deki, kenar uzunluğu x birim olan bir karenin her bir kenarı, “21. Şekil”de olduğu gibi y birim uzatılarak bir kenarı $(x + y)$ birim olan kare elde edilmiştir.

20. Şekil *21. Şekil* *22. Şekil*



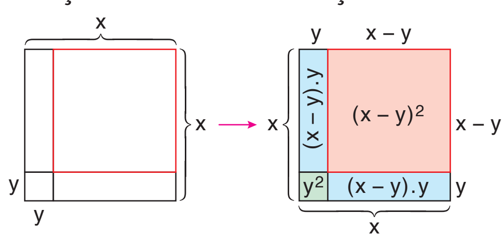
- “21. Şekil”in alanını veren ifadeyi yazınız.
- “22. Şekil”in alanını, farklı renklerde gösterilen bölgelerin alanları toplamı olarak yazınız.

➢ Yazdığınız ifadeleri karşılaştırınız. Aralarındaki ilişkiyi arkadaşlarınızla tartışarak ulaştığınız sonucu açıklayınız.

➢ Etkinlik basamaklarından yararlanarak $(x + y)^2$ ifadesinin eşitini bulunuz.

II. “23. Şekil”de kenar uzunluğu x birim olan bir karenin içine kenar uzunluğu y birim olan bir kare çizilmiştir.

23. Şekil *24. Şekil*



- “23. Şekil”in alanını veren ifadeyi yazınız.
- “24. Şekil”in alanını, üzerinde farklı renklerde gösterilen bölgelerin alanları toplamı olarak yazınız.

➢ Yazdığınız ifadeleri karşılaştırınız. Aralarındaki ilişkiyi arkadaşlarınızla tartışarak ulaştığınız sonucu açıklayınız.

➢ Etkinlik basamaklarından yararlanarak $(x - y)^2$ ifadesinin eşitini bulunuz.

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ve $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ eşitliklerine **tam kare özdeşliği** adı verilir.

5. Örnek

$(x+2)^2$ ve $(2a-1)^2$ ifadelerinin eşitlerini bulalım.

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= (x+2)(x+2)\\ &= x.(x+2)+2.(x+2)\\ &= x^2+x.2+2.x+2.2\\ &= x^2+4x+4 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2a-1)^2 &= (2a-1)(2a-1)\\ &= 2a.(2a-1)-1.(2a-1)\\ &= 4a^2+2a.(-1)-1.2a-1.(-1)\\ &= 4a^2-4a+1 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Sıra Sizde

$(2x+3)^2$ ve $(3a-2)^2$ ifadelerinin eşitlerini bulunuz.

DİKKAT

$(x \pm y)^2$ ifadesinin $x^2 \pm 2xy + y^2$ şeklinde üç terimli bir açılımı olduğuna ve $x^2 \pm y^2$ ye eşit olmadığına dikkat ediniz.

6. Örnek

$(\sqrt{3}a-\sqrt{2}b)^2$ ifadesinin eşitini bulalım.

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}a-\sqrt{2}b)^2 &= (\sqrt{3}a)^2-2.\sqrt{3}a.\sqrt{2}b+(\sqrt{2}b)^2\\ &= 3a^2-2\sqrt{6}ab+2b^2 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Sıra Sizde

$(a\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2$ ifadesinin eşitini bulunuz.

7. Örnek

$a+b=4$ ve $a.b=2$ olduğuna göre a^2+b^2 ifadesinin eşitini bulalım.

Verilen değerleri $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ özdeşliğinde yerine yazalım.

$$\begin{aligned}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 &\Rightarrow 4^2=a^2+2.2+b^2\\ &\Rightarrow a^2+b^2=12 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Sıra Sizde

$a - b = 5$ ve $a . b = 5$ olduğuna göre $a^2 + b^2$ ifadesinin eşitini bulunuz.

8. Örnek

$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$ olduğunu gösterelim.

$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$ ifadesini verilen eşitliğin sağ tarafında yerine yazalım.

$$\begin{aligned}(x - y)^2 + 4xy &= x^2 + y^2 - 2xy + 4xy \\ &= x^2 + y^2 + 2xy \\ &= (x + y)^2 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Sıra Sizde

$(a - 3b)^2 = (a + 3b)^2 - 12ab$ olduğunu gösteriniz.

9. Örnek

İki sayının toplamları 22 ve farkları 8 olduğuna göre bu sayıların çarpımlarını bulalım.

Bu iki sayı x ve y olsun. Buna göre $x + y = 22$ ve $x - y = 8$ ise xy yi bulmalıyız.

$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$ özdeşliğini kullanarak sonuca ulaşabiliriz.

$$\begin{aligned}22^2 = 8^2 + 4xy &\Rightarrow 484 = 64 + 4xy \\ &\Rightarrow 4xy = 484 - 64 \\ &\Rightarrow xy = 105 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Sıra Sizde

Farkları 7 ve çarpımları 44 olan iki sayının toplamının kaç olabileceğini bulunuz.

10. Örnek

Aşağıdaki ifadeleri tam kare özdeşliklerinden yararlanarak çarpanlarına ayıralım.

a. $x^2 + 4xy + 4y^2$ **b.** $4a^2 - 12a + 9$

c. $\dfrac{a^4}{9} - \dfrac{a^2 b}{3} + \dfrac{b^2}{4}$

a. $x^2 + 4xy + 4y^2$ ifadesinde;

1. terimin karekökü : x
3. terimin karekökü : 2y

$\Big\}$ $2.(x.2y) = 4xy$ olduğundan *(ortadaki terim),*

$\overbrace{x^2}^{(x)^2} + 4xy + \overbrace{4y^2}^{(2y)^2}$ ifadesi tam karedir. Bu durumda,

$$x^2 + 4xy + y^2 = (x + 2y)^2$$
$$= (x + 2y)(x + 2y) \text{ olur.}$$

b. $\overbrace{4a^2}^{(2a)^2} - 12a + \overbrace{9}^{(3)^2} = (2a)^2 - 2.(2a).3 + 3^2$

$$= (2a - 3)^2$$
$$= (2a - 3)(2a - 3) \text{ olur.}$$

c. $\overbrace{\dfrac{a^4}{9}}^{\left(\frac{a^2}{3}\right)^2} - \dfrac{a^2 b}{3} + \overbrace{\dfrac{b^2}{4}}^{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \left(\dfrac{a^2}{3}\right)^2 - 2.\left(\dfrac{a^2}{3}\right).\left(\dfrac{b}{2}\right) + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2$ olur.

$$= \left(\frac{a^2}{3} - \frac{b}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{a^2}{3} - \frac{b}{2}\right)\left(\frac{a^2}{3} - \frac{b}{2}\right) \text{ olur.}$$

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadeleri tam kare özdeşliklerinden yararlanarak çarpanlarına ayırınız.

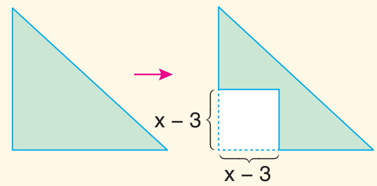
a. $9x^2 + 12x + 4$ **b.** $25x^2 - 20x + 4$

c. $x^2 + 4 + \dfrac{4}{x^2}$

11. Örnek

"25. Şekil" de ikizkenar dik üçgen şeklindeki kâğıdın bir köşesinden kesilen kare gösterilmiştir. Kesme işleminden sonra kalan parçanın alanını ifade eden polinom $P(x) = x^2 + 10x - 7$ olduğuna göre ilk durumdaki ikizkenar dik üçgenin kenar uzunluğunu bulalım.

25. Şekil



$P(x)$ polinomuna kesilen karenin alanını ifade eden $Q(x)$ polinomunu ekleyip dik üçgenin alanını bulalım.

$$Q(x) = (x-3).(x-3)$$
$$= x^2 - 3x - 3x + 9$$
$$= x^2 - 6x + 9 \text{ dur.}$$

O hâlde üçgenin alanı,

$$P(x) + Q(x) = x^2 + 10x - 7 + x^2 - 6x + 9$$
$$= 2x^2 + 4x + 2 \text{ dir.}$$

Bulunan bu ikizkenar dik üçgenin alanı 2 ile çarpıldığında bir karenin alanını ifade edecek dolayısıyla polinom tam kare ifade olacaktır.

O hâlde

$2.(2x^2 + 4x + 2) = 4x^2 + 8x + 4$ ifadesi tam kare ifadedir.

Buna göre,

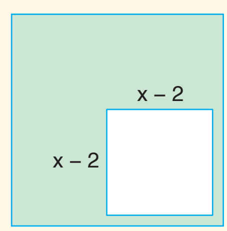
$$\overbrace{4x^2}^{(2x)^2} + 8x + \overbrace{4}^{2^2} = (2x)^2 + 2.(2x).2 + 2^2$$
$$= (2x+2)^2$$
$$= (2x+2).(2x+2) \text{ dir.}$$

O hâlde ikizkenar dik üçgenin bir dik kenarını ifade eden polinom $2x + 2$ dir.

Sıra Sizde

"26. Şekil" de bir karenin içinden kesilen kare gösterilmiştir. Kesme işleminden sonra kalan parçanın alanını ifade eden polinom $P(x) = 10x + 5$ olduğuna göre ilk durumdaki karenin kenar uzunluğunu ifade eden polinomu bulunuz.

26. Şekil



$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) \text{ ve}$$
$$(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(-xy - xz + yz) \text{ dir.}$$

12. Örnek

Aşağıdaki ifadelerin özdeşlerini bulalım.

a. $(3+a-b)^2$ **b.** $(1-3x-y)^2$ **c.** $(\sqrt{2}x-\sqrt{2}+1)^2$

a. $(3+a-b)^2 = 3^2+a^2+(-b)^2+2[3a+3.(-b)+a.(-b)]$

$= 9+a^2+b^2+2(3a-3b-ab)$ olur.

b. $(1-3x-y)^2 = 1^2+(-3x)^2+(-y)^2+2[1.(-3x)+1.(-y)+(-3x).(-y)]$

$= 1+9x^2+y^2+2(-3x-y+3xy)$ olur.

c. $(\sqrt{2}x-\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2}x)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2+2[\sqrt{2}x.(-\sqrt{2})+\sqrt{2}x.1+(-\sqrt{2}).1]$

$= 2x^2+2+1+2(-2x+\sqrt{2}x-\sqrt{2})$

$= 2x^2+3+2(-2x+\sqrt{2}x-\sqrt{2})$ olur.

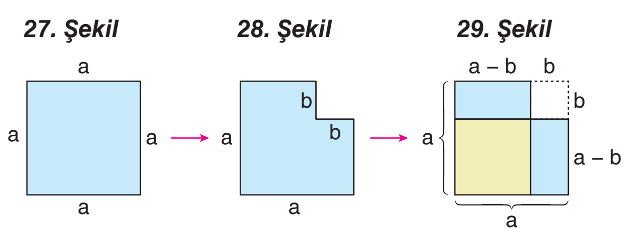
Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadelerin özdeşlerini bulunuz.

a. $(2-a-3b)^2$ **b.** $(1+2x-3y)^2$ **c.** $(\sqrt{3}x+\sqrt{3}-1)^2$

ETKİNLİK

"27. Şekil" deki, kenar uzunluğu a birim olan karenin köşesinden bir kenar uzunluğu b birim olan kare çıkarılarak "28. Şekil" elde edilmiştir.



- "28. Şekil" in alanını a^2 ve b^2 ye bağlı olarak yazınız.
- "29. Şekil" in alanını, boyanmış üç dörtgenin alanlarının toplamı olarak yazınız. Yazdığınız ifadeyi ortak çarpan parantezine alınız.

➢ Yazdığınız ifadeleri karşılaştırınız. Aralarındaki ilişkiyi arkadaşlarınızla tartışarak ulaştığınız sonucu açıklayınız.

13. Örnek

$(a-b)(a+b)$ ifadesinin eşitini bulalım.

$$(a-b)(a+b) = a(a+b) - b(a+b)$$
$$= a^2 + ab - ba - b^2$$
$$= a^2 - b^2 \text{ olur.}$$

Sıra Sizde

$(a-2)(a+2)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

> $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ eşitiliği **iki kare farkı özdeşliği** olarak adlandırılır.

14. Örnek

Aşağıdaki ifadeleri iki kare farkı özdeşliğinden yararlanarak çarpanlarına ayıralım.

a. $4x^2 - 9$ **b.** $a^4b^2 - c^6$

c. $32x^2 - 50$ **d.** $25m^2 - 10m + 1 - 36n^2$

a. $4x^2$ nin karekökü $\rightarrow 2x$
9 un karekökü $\rightarrow 3$
$\Rightarrow 4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2$
$= (2x-3)(2x+3)$ olur.

b. a^4b^2 nin karekökü $\rightarrow a^2b$
c^6 nın karekökü $\rightarrow c^3$
$\Rightarrow a^4b^2 - c^6 = (a^2b)^2 - (c^3)^2$
$= (a^2b - c^3)(a^2b + c^3)$ olur.

c. $32x^2 - 50 = 2[16x^2 - 25]$
$= 2[(4x)^2 - 5^2]$
$= 2(4x-5)(4x+5)$ olur.

d. $\underbrace{25m^2}_{(5m)^2} - 10m + \underbrace{1}_{1^2} = (5m-1)^2$ olduğundan $25m^2 - 10m + 1$ ifadesi tam karedir. Bu durumda verilen ifadenin tamamı $(5m-1)^2 - (6n)^2$ iki kare farkına dönüşür.

Buradan,

$(5m-1)^2 - (6n)^2 = [(5m-1) - 6n][(5m-1) + 6n]$
$= (5m - 6n - 1)(5m + 6n - 1)$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadeleri iki kare farkı özdeşliğinden yararlanarak çarpanlarına ayırınız.

a. $9x^2 - 4$ **b.** $4a^2b^2 - 16c^2$

c. $2x^2 - 200$ **d.** $16m^2 - 8m + 1 - 25n^2$

15. Örnek

$\sqrt{211.189+121}$ işleminin sonucunu iki kare farkı özdeşliğinden yararlanarak bulalım.

211.189 çarpımını, 211 ile 189 sayılarına eşit uzaklıkta bulunan (aritmetik ortalamaları olan) 200 sayısını kullanarak ifade edelim.

$211.189 = (200 + 11).(200 - 11)$

$= 200^2 - 11^2$ dir. O hâlde

$\sqrt{211.189+121} = \sqrt{200^2 - 11^2 + 121}$

$= \sqrt{200^2 - \cancel{121} + \cancel{121}}$

$= \sqrt{200^2}$

$= 200$ bulunur.

DİKKAT

$x^2 - y^2$ iki kare farkı ifadesiyle $(x - y)^2$ iki terimin farkının karesi açılımlarını karıştırmamaya dikkat ediniz.

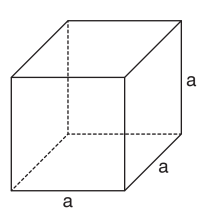
Sıra Sizde

$\sqrt{1893.1907+49}$ işleminin sonucunu iki kare farkı özdeşliğinden yararlanarak bulunuz.

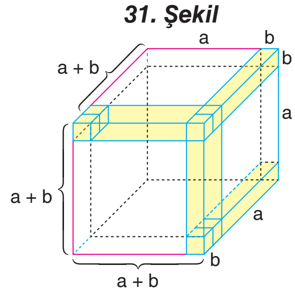
ETKİNLİK

"30. Şekil"de verilen küpün bir kenar uzunluğu a br dir. Bu küpün üç ayrıtı da b br uzatılarak bir ayrıtının uzunluğu a + b br olan "31. Şekil"deki küp elde edilmiştir.

30. Şekil



31. Şekil



- "30. Şekil"deki küpün hacmini veren ifadeyi yazınız.
- "31. Şekil"deki küpün hacmini içindeki prizmaların tümünün hacmini toplayarak bulunuz.

➢ Yazdığınız ifadeleri karşılaştırınız. Aralarındaki ilişkiyi arkadaşlarınızla tartışarak sonucu açıklayınız.

16. Örnek

$(a+1)^3$ ve $(a-2)^3$ ifadelerinin eşitlerini bulalım.

$$\begin{aligned}(a+1)^3 &= (a+1)(a+1)^2\\ &= (a+1)(a^2+2a+1)\\ &= a^3+a.2a+a+a^2+2a+1\\ &= a^3+3a^2+3a+1 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-2)^3 &= (a-2)(a-2)^2\\ &= (a-2)(a^2-4a+4)\\ &= a^3-a.4a+a.4-2a^2+2.4a-8\\ &= a^3-6a^2+12a-8 \text{ olur.}\end{aligned}$$

PROJE

111. sayfadaki projede "Projenin İçeriği" bölümündeki dördüncü adımı gerçekleştirebilirsiniz.

Sıra Sizde

$(2-3x)^3$ ve $(2x+1)^3$ ifadelerinin eşitlerini bulunuz.

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ve

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ eşitlikleri **iki terimin toplamının ve farkının küpü** özdeşlikleridir.

17. Örnek

Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulalım.

a. $(2b+a)^3$ **b.** $\left(2m-\frac{2}{3}n\right)^3$

a. $$\begin{aligned}(2b+a)^3 &= (2b)^3+3.(2b)^2.a+3.2b.a^2+a^3\\ &= 8b^3+3a.4b^2+6b.a^2+a^3\\ &= 8b^3+12b^2a+6ba^2+a^3 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

b. $\left(2m-\frac{2}{3}n\right)^3 = (2m)^3 - 3.(2m)^2.\frac{2}{3}n + 3.2m.\left(\frac{2}{3}n\right)^2 - \left(\frac{2}{3}n\right)^3$

$= 8m^3 - 4m^2.2n + 6m.\frac{4}{9}n^2 - \frac{8}{27}n^3$

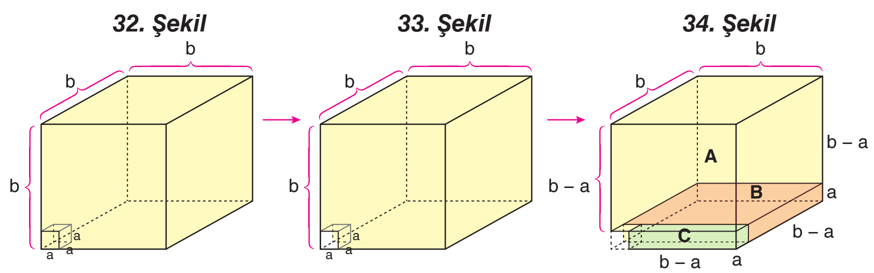
$= 8m^3 - 8m^2n + \frac{8}{3}mn^2 - \frac{8}{27}n^3$ bulunur.

Sıra Sizde

$(2x-3y)^3$ ve $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$ ifadelerinin eşitlerini bulunuz.

ETKİNLİK

"32. Şekil"de verilen bir ayrıtının uzunluğu b br olan küpün köşesinden bir ayrıtının uzunluğu a br olan bir başka küp çıkarılarak "33. Şekil" elde edilmiştir.



- "33. Şekil"deki şeklin hacmini veren ifadeyi yazınız.
- "34. Şekil"deki şeklin hacmini A, B ve C ile isimlendirilmiş cisimlerin hacimlerinin toplamı olarak yazınız. Yazdığınız ifadeyi ortak çarpan parantezine alınız.

➢ Yazdığınız ifadeleri karşılaştırınız. Aralarındaki ilişkiyi arkadaşlarınızla tartışarak ulaştığınız sonucu açıklayınız.

18. Örnek

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$ ve $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ifadelerinin eşitlerini bulalım.

$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} + b^3$

$= a^3 + b^3$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} - b^3$$
$$= a^3 - b^3 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$(x+3)(x^2-3x+9)$ ve $(x-5)(x^2+5x+25)$ ifadelerinin eşitlerini bulunuz.

> $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ ve $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ifadeleri **iki küp toplamı** ve **iki küp farkı** özdeşlikleridir.

19. Örnek

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıralım.

a. x^3+8

b. $27-8a^3$

c. $125-\frac{1}{64}x^3$

d. $(x-1)^3-8$

a. $x^3+8 = x^3+2^3$
$= (x+2)(x^2-x.2+2^2)$
$= (x+2)(x^2-2x+4)$ bulunur.

b. $27-8a^3 = 3^3-(2a)^3$
$= (3-2a)[3^2+3.2a+(2a)^2]$
$= (3-2a)(9+6a+4a^2)$ bulunur.

c. $125-\frac{1}{64}x^3 = 5^3-\left(\frac{1}{4}x\right)^3$
$$= \left(5-\frac{x}{4}\right)\left[5^2+5.\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}\right)^2\right]$$
$$= \left(5-\frac{x}{4}\right)\left(25+\frac{5x}{4}+\frac{x^2}{16}\right)$$

d. $(x-1)^3-8 = (x-1)^3-2^3$
$= [(x-1)-2][(x-1)^2+(x-1).2+2^2]$
$= (x-3)(x^2-2x+1+2x-2+4)$
$= (x-3)(x^2+3)$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a. $x^3 - 1$

b. $8x^3 + 27$

c. $1 - \frac{1}{x^3}$

d. $(x - 4)^3 + 64$

Gördüğümüz özdeşliklerden bazılarını düzenleyerek aşağıdaki eşitlikleri elde edebiliriz.

- $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$
- $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$
- $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$
- $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$
- $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz)$
- $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$
- $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$

20. Örnek

$x - y = 3$ ve $x^3 - y^3 = 117$ olduğuna göre $x.y$ nin değerini bulalım.

$x^3 - y^3$, $x - y$ ve $x.y$ ifadelerinin bir arada kullanıldığı özdeşlik,

$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy.(x - y)$ dir.

Verilen değerleri bu özdeşlikte yerine yazalım.

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy.(x - y) \Rightarrow 117 = 3^3 + 3xy.3$$
$$\Rightarrow 117 = 27 + 9xy$$
$$\Rightarrow 90 = 9xy$$
$$\Rightarrow xy = 10 \text{ bulunur.}$$

DİKKAT

$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$... I

$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)^3 \mp 3xy(x \pm y)$... II

Yukarıdaki özdeşliklerden I. sinin rasyonel ifadeleri sadeleştirirken, II. sinin de değer bulma problemlerinde kullanılması kolaylık sağlar.

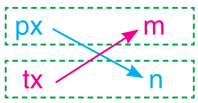
Sıra Sizde

$x - y = 5$ ve $x.y = 6$ olduğuna göre $x^3 - y^3$ ün değerini bulunuz.

$ax^2 + bx + c$ Şeklindeki İfadeleri Çarpanlara Ayırma

$ax^2 + bx + c$ şeklindeki üç terimli ifadeleri çarpanlarına ayırırken birinci ve üçüncü terimin $ax^2 = px \cdot tx$ ve $c = m \cdot n$ şeklinde çarpanları seçilir.

$ax^2 + bx + c$

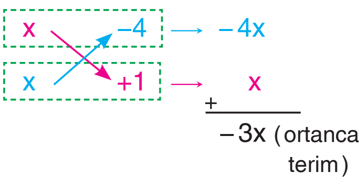


Bu çarpanlar çapraz olarak çarpılıp toplandığında ortanca terim bulunuyorsa çarpanlar doğru seçilmiştir. Bu seçilen çarpanlar yan yana yazılırsa $ax^2 + bx + c = (px + m) \cdot (tx + n)$ çarpanlara ayırma işlemi sonlanmış olur.

21. Örnek

$x^2 - 3x - 4$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

$x^2 - 3x - 4$



Seçilen çarpanlar çapraz çarpılıp bulunan terimler toplandığında ortanca terim olan $-3x$ bulunur. O hâlde çarpanlar doğru olup ifade $(x - 4) \cdot (x + 1)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır.

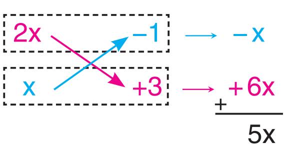
Sıra Sizde

$x^2 + 3x + 2$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

22. Örnek

$2x^2 + 5x - 3$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

$2x^2 + 5x - 3$



Seçtiğimiz çarpanların çapraz çarpımlarının toplamı ortanca terim olan $5x$ i verir. O hâlde $2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$ şeklinde çarpanlara ayrılır.

Sıra Sizde

$2x^2 + x - 1$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

23. Örnek

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıralım.

a. $4x^2 - 3x - 1$

$4x$	$+1$	$\longrightarrow$	$+x$
x	-1	$\longrightarrow$	$-4x$
		$+$	$-3x$

$(4x + 1)(x - 1)$

b. $6x^2 - 13x + 6$

$3x$	-2	$\longrightarrow$	$-4x$
$2x$	-3	$\longrightarrow$	$-9x$
		$+$	$-13x$

$(3x - 2)(2x - 3)$

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a. $4x^2 + 6x + 2$ **b.** $3x^2 - 8x + 5$

Değişken Değiştirme Yöntemi İle Çarpanlara Ayırma

ETKİNLİK

- $a^2 + 3a - 4$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.
- $4^x + 3.2^x - 4$ ifadesinde 2^x yerine a yazarak elde ettiğiniz ifadeyi etkinliğin birinci basamağındaki ifade ile karşılaştırınız.

➢ $a^2 + 3a - 4$ ifadesinden yararlanarak $4^x + 3.2^x - 4$ ifadesinin çarpanlarının nasıl bulunabileceğini arkadaşlarınızla tartışarak açıklayınız.

- $u^2 - 4u + 3$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.
- $(x^2 + x)^2 - 4(x^2 + x) + 3$ ifadesinde $(x^2 + x)$ yerine u yazarak elde edeceğiniz ifade ile bir önceki basamaktaki ifadeyi karşılaştırınız.

➢ $u^2 - 4u + 3$ ifadesinden yararlanarak $(x^2 + x)^2 - 4(x^2 + x) + 3$ ifadesinin çarpanlarının nasıl bulunabileceğini arkadaşlarınızla tartışarak açıklayınız.

PROJE

111. sayfadaki projede “Projenin İçeriği” bölümündeki beşinci adımı gerçekleştirebilirsiniz.

Bir ifadedeki değişkeni başka bir değişkenle değiştirerek daha basit bir ifade elde etmeye ve bu yöntemle ifadeyi çarpanlara ayırmaya değişken değiştirme yöntemi ile çarpanlarına ayırma denir.

24. Örnek

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıralım.

a. $4x^8 + 4x^4 + 1$ **b.** $3.3^{2x} + 2.3x - 5$

a. $4x^8 + 4x^4 + 1$ ifadesini $(2x^4)^2 + 2.2x^4 + 1^2$ şeklinde yazalım.

Bu ifadede $2x^4$ yerine a yazarsak $a^2 + 2a + 1$ ifadesini elde ederiz.

Bu ifadenin çarpanları,

$a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$

$= (a + 1)(a + 1)$ dir.

a yerine tekrar $2x^4$ yazılırsa,

$4x^8 + 4x^4 + 1 = (2x^4 + 1)(2x^4 + 1)$ olur.

b. $3.(3^x)^2 + 2.3^x - 5$ ifadesinde 3^x yerine t yazarsak $3t^2 + 2t - 5$ ifadesini elde ederiz. Bu ifadenin çarpanları,

$3t^2 + 2t - 5 = (3t + 5)(t - 1)$ dir.

t yerine tekrar 3^x yazılırsa,

$3.3^{2x} + 2.3^x - 5 = (3.3^x + 5)(3^x - 1)$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a. $9x^6 - 6x^3 + 1$ **b.** $4^{x+1} - 2^x - 3$

25. Örnek

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıralım.

a. $4^x + 2^{x+1} - 8$ **b.** $x^4 + x^2 - 6$

a. $4^x + 2^{x+1} - 8 = 2^{2x} + 2.2^x - 8$ dir. Bu ifadede $2^x = t$ yazarsak

$t^2 + 2t - 8$ ifadesi elde edilir.

$(t^2 + 2t - 8) = (t - 2)(t + 4)$ olacağından

$4^x + 2^{x+1} - 8 = (2^x - 2)(2^x + 4)$ olur.

b. $x^4 + x^2 - 6$ ifadesinde $x^2 = t$ yazarsak $t^2 + t - 6$ ifadesi elde edilir. $t^2 + t - 6 = (t + 3)(t - 2)$ olur. O hâlde verilen ifadenin çarpanlara ayrılmış hâli $(x^2 + 3)(x^2 - 2)$ dir.

DİKKAT

Değişken değiştirme yoluyla çarpanlarına ayırma işlemi yapıldıktan sonra, sonucu tekrar ilk değişken türünden ifade etmeyi unutmayınız.

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a. $9^x - 3^{x+1} + 2$

b. $x^8 - x^4 - 2$

26. Örnek

$(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

$x^2 - x = u$ alınırsa,

$(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = u^2 - 8u + 12$ olur.

$u^2 - 8u + 12 = (u - 6)(u - 2)$ olduğundan u yerine $x^2 - x$ yazılırsa,

$(x^2 - x) - 8(x^2 - x) + 12 = (x^2 - x - 6)(x^2 - x - 2)$

$\qquad\qquad\downarrow\qquad\qquad\downarrow$

$\qquad\quad -3 \qquad\quad -2$

$\qquad\quad +2 \qquad\quad +1$

$= (x - 3)(x + 2)(x - 2)(x + 1)$ elde edilir.

Sıra Sizde

$(x^2 - 2x)^2 - 11(x^2 - 2x) + 24$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Rasyonel İfadeler

Selimiye Camisi, 16. yüzyılda Mimar Sinan tarafından Edirne şehir merkezinde yapılan ve Osmanlı mimarisinin ulaştığı en yüksek düzeyi temsil eden bir yapıdır. Sinan' ın ileri bir yaşta tamamladığı Selimiye Camisinin taban ölçülerinde altın oran kullanımı dikkat çekmektedir. Mekân bütünlüğüne ulaşma çabalarının zirvesi olan Selimiye Camisi kendinden önce yapılmış olan tüm eserleri geride bırakmış bu özelliğiyle dünya sanat tarihine geçmiştir.

Altın oran, bir bütünün parçaları arasında en iyi uyumu verdiği sanılan geometrik ve sayısal bir orandır. Kenar uzunlukları arasında altın oran bulunan dikdörtgenlere altın dikdörtgenler adı verilir. Uzun kenarlarının kısa kenarlarına oranları sabit olan altın dikdörtgenler, içlerinden kısa kenarlarını kenar kabul eden kareler çıkarıldığında yeni altın dikdörtgenler oluşturan ilginç geometrik şekillerdir.

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom ve $Q(x) \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki ifadelere rasyonel ifadeler denir.

ETKİNLİK

- $P(x) = x^2 - 4$, $Q(x) = x^2 - x - 6$ polinomları verilmiş olsun. Bu polinomlar $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ biçiminde yazılırsa elde edilen rasyonel ifade $x = 3$ ve $x = -2$ için hesaplanabilir mi?

- $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesinin tanımlı olabilmesi için $Q(x)$ in sağlaması gereken özellik nedir? Açıklayınız.

➢ Rasyonel sayılarda sadeleştirme işlemini hatırlayınız. Bu sadeleştirme işleminden yararlanarak $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesinin nasıl sadeleştirilebileceğini arkadaşlarınızla tartışarak açıklayınız.

27. Örnek

$\dfrac{3x^3}{12x^6}$ ifadesini en sade biçimde yazalım.

$$\frac{3x^3}{12x^6} = \frac{\cancel{3}\cancel{x^3}}{4.\cancel{3}.x^3.\cancel{x^3}}$$

$$= \frac{1}{4x^3} \text{ olur.}$$

Sıra Sizde

$\dfrac{(4x)^3}{32x^5}$ ifadesini en sade biçimde yazınız.

28. Örnek

$\dfrac{4b^3-9a^2b}{3a^3b+a^2b^2-2ab^3}$ **ifadesini sadeleştirelim.**

$$\frac{4b^3-9a^2b}{3a^3b+a^2b^2-2ab^3}=\frac{\not{b}(4b^2-9a^2)}{a\not{b}(3a^2+ab-2b^2)}$$

$(3a^2+ab-2b^2=(3a-2b)(a+b)$ dir.)

$$=\frac{(2b-3a)(2b+3a)}{a(3a-2b)(a+b)}$$

$$=\frac{-(3a-2b)(2b+3a)}{a(3a-2b)(a+b)}$$

$$=\frac{-2b-3a}{a^2+ab} \text{ olur.}$$

Sıra Sizde

$\dfrac{9a^2-b^2}{3a^2-2ab-b^2}$ ifadesini sadeleştiriniz.

PROJE

111. sayfadaki projede "Projenin İçeriği" bölümündeki yedinci adımı gerçekleştirebilirsiniz.

29. Örnek

$\dfrac{x^2-25}{x^2+4x+3}:\dfrac{3x-15}{2x+6}$ **işlemini yapalım.**

$$\frac{x^2-25}{x^2+4x+3}\cdot\frac{2x+6}{3x-15}=\frac{(x-5)(x+5)}{(x+3)(x+1)}\cdot\frac{2(x+3)}{3(x-5)}$$

$$=\frac{2(x-5)(x+5)(x+3)}{3(x+3)(x+1)(x-5)}$$

$$=\frac{2(x+5)}{3(x+1)} \text{ bulunur.}$$

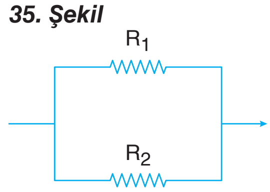
Sıra Sizde

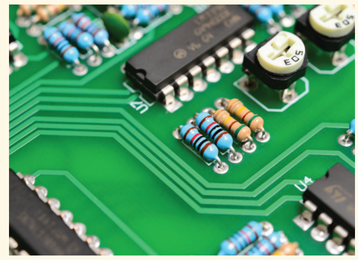
$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2+2x-3}{3x+9}$ işlemini yapınız.

30. Örnek

Bir elektrik devresinde, dirençleri R_1 ve R_2 olan iki direnç, "35. Şekil" deki gibi paralel bağlanmıştır. Bu dirençler ile sonuçta oluşan bileşke direnç (R) arasında $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ bağıntısı bulunmaktadır.

35. Şekil





Bunun gibi bir elektrik devresinde, R_1 direncinin büyüklüğü x ohm ve R_2 direncinin büyüklüğü de R_1 in üç katının 1 ohm eksiği olsun. Buna göre bileşke direncin ne olacağını bulalım.

$R_1 = x$ ohm ise $R_2 = 3R_1 - 1 = 3x - 1$ ohm olur. Buna göre,

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

$$=\underset{(3x-1)}{\frac{1}{x}}+\underset{(x)}{\frac{1}{3x-1}}$$

$$=\frac{3x-1}{x(3x-1)}+\frac{x}{x(3x-1)}$$

$$=\frac{4x-1}{x(3x-1)} \text{ olur.}$$

O hâlde bileşke direnç $\frac{1}{R}=\frac{4x-1}{x(3x-1)} \Rightarrow R=\frac{x(3x-1)}{4x-1}$ ohm bulunur.

Sıra Sizde

"32. Örnek"te $R_1 = x + 2$ ohm ve $R_2 = 2x - 1$ ohm alarak bileşke direnci bulunuz.

31. Örnek

Bir futbol takımının sahasının bakımını üstlenen iki görevliden birincisi sahanın tüm çimlerini ikincisinden 3 saat daha kısa sürede biçebilmektedir. Buna göre peş peşe dörder saat çim biçen görevlilerin toplamda sahanın ne kadarlık kısmını biçebileceğini bulalım.

Birinci görevli sahanın tamamını x saatte biçiyor olsun. Buna göre bu görevli 1 saatte sahanın $\frac{1}{x}$ lik kısmını biçebilir.

O hâlde birinci görevli 4 saat çalışınca da sahanın $4.\frac{1}{x}=\frac{4}{x}$ lik kısmını biçer.

Birinci görevli sahanın tamamını ikinci görevliden 3 saat daha kısa sürede biçebiliyorsa ikinci görevli sahanın tamamını x + 3 saatte biçebilir.

İkinci görevli 1 saatte sahanın $\frac{1}{x+3}$ lük kısmını, 4 saatte de $4.\frac{1}{x+3}=\frac{4}{x+3}$ lük kısmını biçebilir.

Buna göre bu iki görevli peş peşe dörder saat çalıştığında sahanın;

$$\underset{(x+3)}{\frac{4}{x}}+\underset{(x)}{\frac{4}{x+3}}=\frac{4.(x+3)}{x.(x+3)}+\frac{4.x}{x.(x+3)}$$

$$=\frac{8x+12}{x.(x+3)}$$ lük kısmı biçilmiş olur.

Sıra Sizde

"33. Örnek"teki görevlilerden birincisi sahanın tamamını ikincisinin 2 katından 3 saat daha fazla sürede biçebildiğini düşününüz. Buna göre ikişer saatlik çalışma sonunda sahanın biçilecek kısmını bulunuz.

PROJE

111. sayfadaki projede "Projenin Sunum Süreci"ni tamamlayarak projeyi sunuma hazır hâle getirebilirsiniz.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki birinci sütunda verilen ifadeleri ikinci sütundaki çarpanlarına ayrılmış hâlleriyle eşleştiriniz.

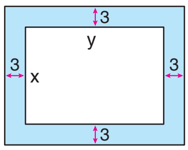
$12x+9y$ •	• $3mn(4n+5)$
$5m-10mn$ •	• $ab(3a+2b)$
$2pq-6p^2q$ •	• $3(4x+3y)$
$3a^2b-2ab^2$ •	• $2pq(1-3p)$
$12mn^2+15mn$ •	• $ab(3a-2b)$
	• $5m(1-2n)$

2. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

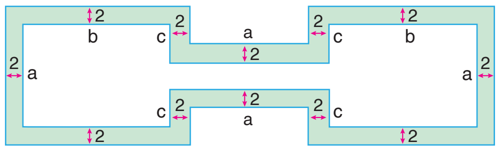
a. $xy-xb-yb+b^2$
b. $(m-n)-(a+b)(m-n)$
c. $m(1-x)+2(1-x)$
d. $(x+2)(2-m)-y(2-m)$
e. $x^2(p-3)+ma^2(3-p)$
f. $x^3-x+1-x^2$
g. $-a-b-x^2(a+b)$
h. $2x^3+2xy^2+3x^2y+3y^3$
i. $a^2b^2+1-(a^2+b^2)$
j. x^4-x+x^3-1
k. $m(x^2+2)-x(m^2+2)$
l. $ab(c^2-d^2)-cd(a^2-b^2)$

3. Aşağıdaki şekillerde verilen boyalı alanları gösteren ifadeleri bulup çarpanlarına ayırınız.

a.



b.



4. Bir karenin çevresi, $(8a + 28b)$ cm dir. Buna göre bu karenin alanının cm^2 türünden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2a + 7b$

B) $16a^2 + 196b^2$

C) $4a^2 + 49b^2$

D) $16a^2 + 112ab + 196b^2$

E) $4a^2 + 28ab + 49b^2$

5. Ahmet Bey, Borsa İstanbul'un açılış saatinde tanesi 3 TL olan hisselerinden x^2 tanesini satıyor. Bir sonraki saatte tanesi 6 TL olan hisselerinden satıyor. Birinci saat sattığı hisselerin sayısı, ikinci saat sattığı hisselerin sayısından 6 fazladır. Eğer Ahmet Bey, iki saat boyunca sadece tanesi $(3x - 6)$ TL olan hisselerinden satmış olsaydı ilk iki satıştan aldığı toplam parayı kazanması için kaç hisse satması gerekirdi?

6. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a. $x^2 + 4xb + 4b^2$

b. $4y^2 - 12y + 9$

c. $4a^2 + 12ab + 9b^2$

d. $4a^2b^2 - 4abc + c^2$

e. $(a + b)^2 - 2(a + b) + 1$

f. $(x - y)^2 - 2(x^2 - y^2) + (x + y)^2$

g. $a^2b + 8ab^2 + 16b^3$

h. $4x^3y - 12x^2y^2 + 9xy^3$

i. $2m^3 - 28m^2 + 98m$

j. $a^2b^3 + 2ab^4 + b^5$

k. $y^2 - 64$

l. $25 - 9a^2b^2$

m. $36c^4 - 81$

n. $18x^2 - 2y^2$

o. $12a^2b^2 - 27m^2$

p. $12x^3y - 75xy^5$

7. Aşağıdaki ifadelerin özdeşlerini bulunuz.

a. $(2x + 1)^2$

b. $(3 - a^2)^2$

c. $\left(\sqrt{2}x + \frac{1}{3}\right)^2$

d. $\left(\frac{a}{2} - 2\sqrt{5}\right)^2$

8. Aşağıdaki çarpımları, iki kare farkı özdeşliğinden yararlanarak bulunuz.

a. 39.41 **b.** 46.54 **c.** 17.23 **d.** 37.43

9. Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapınız.

a. $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right)$ **b.** $(x^m - 2y^n)(x^m + 2y^n)$

c. $[(a+b)-3x][(a+b)+3x]$

10. Aşağıda, birinci sütunda verilen ifadelerin özdeşlerini ikinci sütundan bularak bunları eşleştiriniz.

$(x+3+y)^2$ •	• x^2+4y^2+16
$(x+1-2y)^2$ •	• $x^2+2xy+6x+6y+9+y^2$
$(x-2y-4)^2$ •	• $x^2-4xy-8x+16y+16+4y^2$
	• $x^2-4xy+2x-4y+1+4y^2$

11. Aşağıdaki noktalı yerleri uygun değerlerle doldurunuz.

a. $a+b=17$ ve $a^2+b^2=145$ ise $a.b=$ ....

b. $a-2b=3$ ve $a.b=2$ ise $a^2+4b^2=$ ....

c. $a+b=12$ ve $a-b=6$ ise $a.b=$ ....

d. $a-\frac{2}{a}=4$ ise $a^2+\frac{4}{a^2}=$ ....

e. $a+b+c=7$ ve $ab+bc+ac=12$ ise $a^2+b^2+c^2=$ ....

12. Aşağıdaki ifadelerin açılımlarını bulunuz.

a. $(2+t)^3$ **b.** $(ab+c)^3$ **c.** $\left(a-\frac{3}{a}\right)^3$

13. Aşağıdaki ifadelerin özdeşlerini yazınız.

a. $1+m^3$ **b.** $8-8b^3$ **c.** x^6-y^3

14. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a. $1-125t^6$ **b.** $x^3a^3-b^3$ **c.** $81m^3-3n^3$

d. $2x+54x^4$ **e.** $mx^7-m^4x^4$ **f.** $24x^3y-3y$

g. a^7+64ab^6 **h.** $250x^4+128x$ **i.** $27-(x-2)^3$

15. Aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara “D”, yanlışsa “Y” yazınız.

a. ☐ $m+n=8$ ve $m.n=1$ ise $m^3+n^3=512$ dir.

b. ☐ $a-\frac{1}{a}=3$ ise $a^3-\frac{1}{a^3}=27$ dir.

c. ☐ $a^3-b^3=50$ ve $a-b=2$ ise $a.b=7$ dir.

16. Aşağıdaki polinomları, terim ekleyip çıkararak çarpanlarına ayırınız.

a. x^2-6x+5 **b.** x^2-2x-8 **c.** x^2-x-6

d. t^2-3t+2 **e.** $m^2+2m-24$ **f.** $a^2+4a-12$

g. $2x^2-5x-7$ **h.** $4a^2-6a+2$ **i.** x^4+64

17. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a. $9^x+3^{x+1}-4$ **b.** $2^{2x+1}-5.2^x+3$

c. $3x^4+5x^2-2$ **d.** $(x^2+x)^2-(x^2+x)-2$

18. Bir motosiklet yarışında, parkur 36 km dir. Bir yarışçının parkurun ikinci yarısındaki ortalama hızı, ilk yarısındaki ortalama hızından 3 km/saat daha azdır. Buna göre aşağıdaki ifadelerde noktalı kısımları doldurunuz.

a. Yarışçının parkurun ilk yarısındaki ortalama hızı x km/saat ise yarışçı, parkurun ilk yarısını .... saatte bitirmiştir.

b. Yarışçı, parkurun ikinci yarısını .... saatte bitirmiştir.

19. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\frac{2}{a+2b}-\frac{a-6b}{a^2-4b^2}$ **b.** $\frac{a+1}{a-2}-\frac{a-1}{a+2}$

c. $\frac{m+n}{m^2+2mn}-\frac{m-n}{mn+2n^2}-\frac{2}{m}$ **d.** $\frac{x+2}{x^2-x-12}-\frac{x}{x^2+6x+9}$

20. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını en sade biçimde yazınız.

a. $\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}:\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ **b.** $\frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy}\cdot\frac{2x^2+10xy}{x^2+3xy-10y^2}$

c. $\left(\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+n}\right):\frac{m}{m-n}$ **d.** $\frac{2}{2+\frac{2}{x+2}}-\frac{2}{2-\frac{2}{x+3}}$

3. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $P(x) = x^5 - \frac{x^4}{4} + \sqrt{21}\,x^2 + 2x - 1$ polinomunun terim sayısını, derecesini, başkatsayısını, ikinci ve üçüncü dereceden terimlerinin katsayılarını bulunuz.

2. $(x^3 + px^2 + k)(x + 1) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + mx - 2$ olduğuna göre $p + k + m$ toplamını bulunuz.

3. $P(x) = 3x^{5-m} + 2x^{2m+2} - x^{m+3} - \frac{1}{3}$ ifadesinin polinom olmasını sağlayan m değerlerini bulunuz.

4. $P(x) = x^4 - x + 1$ ve $Q(x) = x^3 + 2$ olmak üzere $\frac{P(x)}{Q(x)}$ in derecesinden söz edebilir miyiz? Neden?

5. Aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

a. ☐ $P(x) = 3x^5 - \frac{2}{3}x^2 + x$ bir polinomdur.

b. ☐ $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 6x^4 - 2$ polinomunun başkatsayısı 3 tür.

c. ☐ $R(x) = 6x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4x^6 - 3$ polinomunun sabit terimi –3 tür.

d. ☐ $T(x) = 7x^3 - 6x^2 + 5x + 2$ polinomunun katsayılar toplamı –6 dır.

6. $P(x) = (a - 1)x^4 + (b + 2)x^3 - 4x + 1$ ve $Q(x) = 6x^3 - (c + 2)x^2 - dx + 1$ polinomları birbirine eşit ise $a + b + c + d$ kaçtır?

A) –1 B) 1 C) 3 D) 5 E) 7

7. $P(x) = x^3 - x^2 + 1$ ise $P(1)$ kaçtır?

A) –4 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

8. $P\left(\frac{x-1}{2}\right) = 4x^2 + 2x - 1$ ise $P(x + 2)$ polinomunu bulunuz.

9. $P(x) + Q(x) = 4x^3 + 5x^2 - 1$ ve $P(x) - Q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$ ise $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarını bulunuz.

10. $(4x^3 - 5x^2 + 2x - 1).(6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 3)$ çarpma işleminin sonucunda elde edilecek polinom kaçıncı derecedendir?

11. Aşağıda verilen $P(x)$ polinomlarının $Q(x)$ polinomlarına bölümünden elde edilecek bölümleri ve kalanları bulunuz.

a. $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$

$Q(x) = x^2 - 2$

b. $P(x) = 2x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 1$

$Q(x) = x^3 + x^2 + 1$

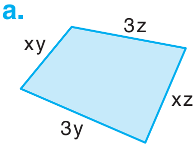
12. $P(x) = 4x^2 - 5x + 1$ polinomu, $Q(x) = x + 1$ ile bölündüğünde elde edilecek kalan kaçtır?

13. $P(x-1) = x^2 - 4x + 1$ olmak üzere $P(x)$ polinomu, $x - 1$ ile bölündüğünde elde edilecek kalan kaçtır?

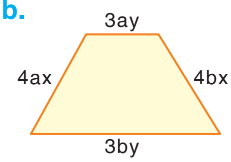
14. $P(x-2) = x^3 - x + 1$ olmak üzere $P(x+1)$ polinomu, $x - 2$ ile bölündüğünde elde edilecek kalan kaçtır?

15. Aşağıdaki dörtgenlerin çevrelerini gösteren ifadeleri bulunuz. Bu ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

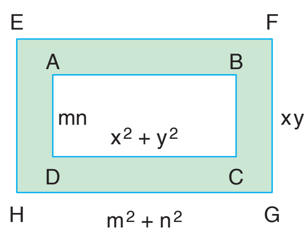
a.



b.



16.



Yukarıdaki şekilde EHGF ve ADCB birer dikdörtgensel bölgedir.
$|AD| = mn$, $|DC| = x^2 + y^2$, $|HG| = m^2 + n^2$ ve $|FG| = xy$ olmak üzere; boyalı bölgenin alanını gösteren ifadeyi bulup çarpanlarına ayırınız.

17. Üst yüzeyi üçgen şeklindeki bir kek diliminin üst yüzeyinin alanı $3x^2 + \frac{13}{2}x - 4$ br^2 dir.
Üçgen diliminin bu yüzeydeki bir yüksekliği $2x - 1$ br ise bu yüksekliğe ait taban uzunluğunu gösteren ifadeyi bulunuz.

18. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a. $y^2 + 7y + 12$

b. $k^2 - 4k + 4$

c. $2xy + zm - zy - 2xm$

d. $3tx - t - 6mx + 2m$

e. $2m^2n - mn^2 + 2tm - tn$

f. $(m+n)^2 - p^2$

g. $x^2 - (2y - p)^2$

h. $(x+y)^2 - (x-y)^2$

i. $(m+n+p)^2 - 1$

j. $18(a+b)^3 - 8(a+b)$

k. $20(x-y)^5 - 5(x-y)^3$

l. $x^2 + 6xy + 9y^2 - z^2$

m. $m^2 - 2mn + n^2 - 4$

n. $a^2 - 4m^2 - 12mn - 9n^2$

o. $3(5x-2)^2 - 27$

p. $a^2b^2 - 4ab - 5$

r. $x^3 + (x-y)^3$

s. $5x^2 - 15x + 10$

t. $6x^2 + 11x - 2$

u. $27x^3 - 48x$

v. $a^2 - 25b^2 - a + 5b$

19. Aşağıdakilerden tam kare olan ifadeleri "✓" sembolü ile işaretleyiniz.

a. ☐ $9x^4 - 6x^2 + 1$

b. ☐ $x^2 - 6x + 9$

c. ☐ $x^4 - x^3 - x^2 + x$

d. ☐ $25x^6 + 20x^3 + 4$

20. Aşağıdaki işlemleri yapınız. İşlemlerin sonuçlarını en sade biçimde yazınız.

a. $\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x+1}$

b. $\frac{2x}{3x-9y}-\frac{4y}{2x-6y}$

c. $\frac{a^4-b^4}{a^4-a^3b}:\frac{a^2+b^2}{a-b}$

d. $\frac{m^2-4m+3}{2m^2-3m+1}\cdot\frac{2m^2+3m-2}{m^2-m-6}$

21. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\frac{2(1-x)}{3}-\frac{x}{2}=x-\frac{x+1}{6}$

b. $2+x=\frac{3}{x}$

c. $\frac{1}{2-x}+\frac{3x}{x^2-4}=0$

d. $\frac{x^2-4}{2x^3-8x}=\frac{1}{x^2-2x}+\frac{1}{2x+4}$

22. Necati Bey, çiçek ektiği kare şeklindeki bölgenin her bir kenarını 6 m arttırarak bahçesinin alanını 4 katına çıkartmıştır. Buna göre bahçenin yeni alanı kaç m^2 dir?

23. Bir nehirde akıntının hızının 4 km/saat olduğunu düşünelim. Bir tekne, akıntı yönünde 5 km yol alıp tekrar aynı yere döndüğünde 3 saat geçiyorsa teknenin durgun sudaki hızı saatte kaç km dir?

24. Aşağıdaki noktalı yerleri uygun ifadelerle tamamlayınız.

a. $P(x)=3x^3-2x^{\frac{12}{2m+4}}$ ifadesi bir polinom olduğuna göre, m nin alması gereken tam sayı değerlerinin toplamı .... olur.

b. $P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom olmak üzere; $P(x).Q(x)$ polinomunun derecesi 5, $\frac{P^2(x)}{Q(x)}$ polinomunun derecesi 4 ise $P(x)-Q(x)$ polinomunun derecesi ...... olur.

c. $P(2x+1)=2x^3-3x^2+4$ ise $P(x+5)$ polinomunun $x+2$ ile bölümünden elde edilen kalan .... olur.

25. $x+2$ polinomu, $P(x)=x^3+7x^2+7x+K(x)$ polinomunun bir çarpanı ise $K(-2)$ nedir?

26. $(x^5-4x^4-3x^2+x-1).(3x^3+ax^2-2x+1)$ polinomunda x^6 lı terimin katsayısı 2 olduğuna göre a kaçtır?

A) –4 B) –3 C) –2 D) –1 E) 0

27. $P(x)=x^{\frac{14}{4+a}}+3x^{a-4}+4$ polinomunun derecesi kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 14

28. $P(x)=ax^2+bx-1$ polinomu $x-2$ ile bölündüğünde bulunan k_1, $x+1$ ile bölündüğünde k_2 kalanı elde ediliyor. $2k_2+3=k_1$ ise $a+2b$ kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

29. $(x-2).P(x)+2x^2-1=x.P(x)+5$ ise $P(x+1)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) x^2+2x-2 B) x^2-x-1 C) x^2+1
D) x^2-3 E) x^2+3x

30. $\dfrac{P(x+a)}{Q(x+2a)}=3x^2-4x+4$ veriliyor. $P(x)$ polinomu, $x-a$ ile bölündüğünde bulunan kalan 2 ise $Q(x)$ polinomu, $x-2a$ ile bölündüğünde elde edilecek kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) –2 B) –1 C) $-\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) 1

31. $(x+1).P(x)+(x^2-2).Q(x+1)=2x-3$ veriliyor. $P(x)$ in sabit terimi 3 ise $Q(x)$ in katsayılar toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

32. $\dfrac{a^2-4}{a^2+a-2}:\dfrac{2a-4}{1-a}$ ifadesinin sadeleşmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) –2 B) $-\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) 1 E) 2

33. $\dfrac{(m^2+mx+x^2)(mx^2-m^2x)}{m^4-mx^3}$ ifadesinin sadeleşmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) m – x B) mx C) –x
D) –m E) –1

34. $\dfrac{(a-b)^7+2a^3b^3+(b-a)^7}{b^3}:\dfrac{a^4+a^3b}{a^2-b^2}$ ifadesinin sadeleşmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2(a + b) B) 2b C) 2(a – b)
D) 2a E) 2

35. $\dfrac{a}{b}-\dfrac{4}{b}=2$ ve $a.b=7$ ise a^2+4b^2 kaçtır?

A) 41 B) 42 C) 44 D) 46 E) 47

36. $\dfrac{x^2-3x+a}{x^2-4}$ ifadesinin sadeleşebilir bir kesir olduğu biliniyorsa a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) –1 B) –8 C) 0 D) 8 E) 10

37. $a+b=3$ ise $\dfrac{a^2-b^2+6a+9}{a^2-b^2+3a+3b}$ ifadesinin eşiti kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 1 D) 2 E) 3

38. Aşağıdakilerden hangisi, $(a^2-4a)^2+2(4a-a^2)-15$ ifadesinin bir çarpanı değildir?

A) a – 1 B) a + 1 C) a – 3
D) a – 5 E) a + 3

39. $\dfrac{a^2+2a-8}{a^2-8a+k}\cdot\dfrac{a^2-a-6}{a^2-4}$ ifadesinin sadeleştirilmiş hâli $\dfrac{a+4}{a-5}$ olduğuna göre k kaçtır?

A) –15 B) –10 C) 5 D) 10 E) 15

4. ÜNİTE

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

Neler Öğreneceğiz?

- İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin çözüm kümesini bulmayı ve karmaşık sayıları öğreneceğiz.

Neden Öğrenmeliyiz?

Günlük hayatta özellikle fiziksel hareket içeren birçok durum denklem veya fonksiyonlar ile ifade edilebilir. Bu problemlerden bazıları da ikinci dereceden denklem içerir.

Bu ünitede öğreneceğimiz ikinci dereceden denklem çözümlerini bir çanak antenin çukurluğu ile çapı arasındaki ilişkiyi, bir köprünün taşıyıcı kemerlerinin arasında olması gereken mesafeyi vb. önemli günlük hayat durumlarına sıklıkla karşılaşacağımız için öğreneceğiz.

ÖNCEKİ BİLGİLERİNİ TEST ET

1. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $3(x-2)+5=2x-7$ **b.** $2-3x=2(1-x)-x$

2. $2x-4(3a-x)-3+7a=0$ denkleminin çözüm kümesi $\{3\}$ olduğuna göre a kaçtır?

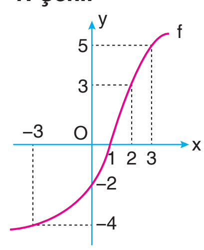
3. $2ax+3=4x-1$ denkleminin çözüm kümesi $\varnothing$ ise a kaçtır?

4. $(a+1)x+(b+2)=0$ denkleminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı ise $a+b$ kaçtır?

5. $\left.\begin{matrix} y+x=8 \\ x-y=2 \end{matrix}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

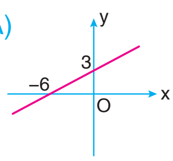
6. "1. Şekil" de verilen grafiğe göre aşağıdaki değerleri bulunuz.

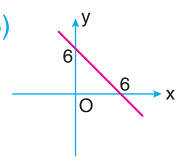
1. Şekil

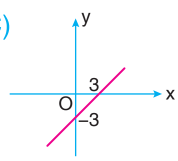


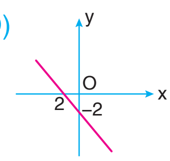
a. $f(-3)+f(0)$ **b.** $f(f(2))$ **c.** $\dfrac{f(1)+f(3)}{2}$

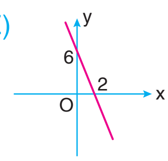
7. $f(x)=-3x+6$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

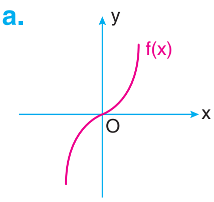
B) 

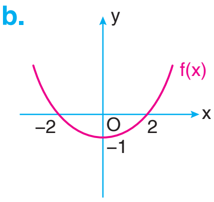
C) 

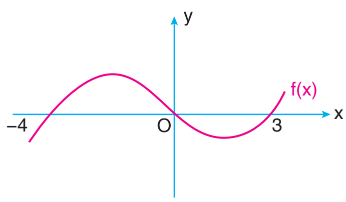
D) 

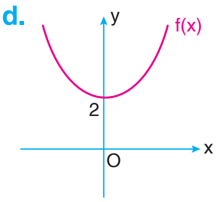
E) 

8. Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlar için $f(x)=0$ denklemlerinin çözüm kümelerini alttaki satırdan bularak eşleştiriniz.

a. 

b. 

c. 

d. 

I. $\{0\}$ **II.** $\varnothing$ **III.** $\{-1, 1\}$ **IV.** $\{2\}$ **V.** $\{-1\}$ **VI.** $\{-4, 0, 3\}$ **VII.** $\{-2, 2\}$

9. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a. $3a^2+6a$ **b.** $2y^2+8y+8$ **c.** $4x^2-9$ **d.** b^2-6b+9

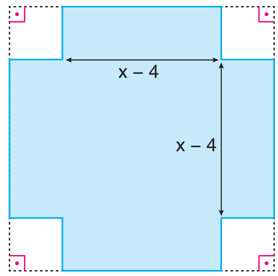
İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

BÖLÜM 4.1

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler ve Çözümleri

Kare şeklindeki bir kartonun köşelerinden kenar uzunluğu 2 cm olan kareler "2. Şekil" deki gibi kesilerek çıkarılıyor ve kalan parçayla üstü açık bir kare prizma elde ediliyor. Kare prizmanın hacminin 18 cm^3 olduğu biliniyor. Kare şeklindeki kartonun bir kenar uzunluğu nasıl bulunabilir? Verilenler denkleme dönüştürüldüğünde elde edilen denklemin özellikleri nelerdir? Bu tür denklemler nasıl çözülebilir?

2. Şekil



İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem	$a \neq 0$ ve a, b, c birer gerçek sayı olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ ifadesine **ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir. a, b ve c sayılarına denklemin **katsayıları**, denklemi sağlayan x değerlerine denklemin **kökü** denir. Ayrıca denklemi sağlayan x değerlerinin kümesi denklemin **çözüm** kümesidir.

1. Örnek

$x^2 + mx + 4 = 0$ denkleminin köklerinden biri -1 olduğuna göre m değerini bulalım.

Verilen denklemin bir kökü -1 ise bu değer denklemde x yerine yazılırsa denklemi sağlar.

$$(-1)^2 + m.(-1) + 4 = 0 \Rightarrow 1 - m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow m = 5 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$tx^2 - (t+1)x + 1 = 0$ denkleminin bir kökü -1 olduğuna göre t değerini bulunuz.

TERİMLER

- İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklem
- Denklemin kökü
- Diskriminant
- Sanal birim
- Karmaşık sayı
- Eşlenik
- Kökler toplamı
- Kökler çarpımı

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

- Δ
- $i^2 = -1$
- $i = \sqrt{-1}$
- $a + bi$
- z
- $\bar{z}$
- $\mathbb{C}$
- $\text{Im}(z)$
- $\text{Re}(z)$
- $x_1 + x_2$
- $x_1 . x_2$

2. Örnek

$2x^2 - 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Denklemi çözmek için bilinmeyeni (x) eşitliğin bir tarafında yalnız bırakalım.

$2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x = -2$ veya $x = 2$ bulunur.

Verilen denklemin kökleri $x_1 = -2$ ve $x_2 = 2$ dir.

Denklemin çözüm kümesi $\{-2, 2\}$ olur.

Sıra Sizde

$3x^2 - 27 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

3. Örnek

$2x^2 + 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Denklemde bilinmeyeni eşitliğin bir tarafında yalnız bırakalım.

$2x^2 + 5 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -5 \Rightarrow x^2 = -\frac{5}{2}$ elde edilir.

Karesi negatif olan bir gerçek sayı olmadığından $2x^2 + 5 = 0$ denklemini sağlayan gerçek sayı yoktur.

Bu denklemin gerçek sayılardaki çözüm kümesi boş küme ($\varnothing$) dir.

Sıra Sizde

$3x^2 + 6 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

BUNLARI BİLİYOR MUYDUNUZ?

İslam matematik tarihinde denklemlerin düzenlenme, incelenme ve çözümlenmesine cebir denilmektedir. Harezmî tarafından yazılan ve tarihte ilk defa ismi içerisinde “cebir” kelimesini taşıyan “Kitabü'l – muhtaşar fi hisabi'l cebr ve'l mukabele” (Cebir ve mukabele hesabı üzerine özet kitap) adlı eserle cebir, eski ve yeni birçok ilim adamının üzerinde birleştiği görüşe göre bağımsız bir bilim hâlinde kurulmuş oluyordu.

Harezmî eserinin önsözünde, insanlara miras, ölçüler, ticaret, yer ölçümü ve benzeri günlük hayat problemlerini çözmede yol gösterecek özet bir kitap yazdığını ifade etmiştir. Bu amacına uygun olarak eseri cebir problemleri, geometrik ölçümler ve miras – vasiyet konuları şeklinde üçe ayrılmıştır.

Harezmî'nin ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler teorisinde yürüttüğü yolu takip eden Abdulhamid İbn Türk (D. ? – Ö. 847) gibi isimler onun örneğe dayalı ispat anlayışını daha da geliştirmiştir. Sâbit ibn Kurrâ (D. 835 – Ö. 901) ise hem Harezmî'nin ispatlarını daha sağlam geometrik temellere oturtmak, hem de ikinci dereceden denklemleri geometrik dile çevirmek için Öklid'in Elementler adlı kitabını yeniden ele almıştır. Matematik tarihinde cebirsel ve geometrik iki yöntemi apaçık bir şekilde birbirinden kesin olarak ayıran ve böylece cebirsel süreçlerin geometrik yorumlarını vererek hem Öklid geometrisinin hem Harezmî cebrinin denklem çözmede kullandığı yöntemlerin aynı sonuca ulaştığını gösteren kişi Sâbit ibn Kurrâ'dır.

Harezmî ile birlikte aynı dönemde yaşamış olan Abdulhamid İbn Türk ve Sabit İbn Kurrâ gibi büyük matematikçiler tarafından da cebir ilmine ciddi katkılar yapmaya başlanmıştır. Abdulhamid İbn Türk özellikle ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri incelediği bir kitapçık yazmış ve $ax^2 + c = bx$ denkleminin bazı özel hallerini Harezmî'den daha ayrıntılı bir şekilde ele almıştır.

Kaynak: http://www.islamansiklopedisi.info/dia/pdf/c28/c280078.pdf,
http://www.islamansiklopedisi.info/dia/pdf/c07/c070117.pdf,
http://www.islamansiklopedisi.info/dia/pdf/c16/c160102.pdf

Çarpanlara Ayırma Yöntemi ile Denklem Çözümü

Bu yöntemde $ax^2 + bx + c = 0$ denklemi çözülürken $ax^2 + bx + c$ ifadesi çarpanlarına ayrılır. Her bir çarpan sıfıra eşitlenerek denklemin kökleri bulunur.

4. Örnek

$4x^2 - 16x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$4x^2 - 16x$ ifadesi çarpanlarına ayrılırsa $4x^2 - 16x = 4x(x - 4)$ olur.

$4x(x - 4) = 0$ ise $4x = 0$ veya $x - 4 = 0$ olmalıdır.

$4x = 0 \Rightarrow x = 0$, $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ olur.

Denklemin kökleri $x_1 = 0$ ve $x_2 = 4$, denklemin çözüm kümesi $\{0, 4\}$ bulunur.

Sıra Sizde

$5x^2 - 15x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

5. Örnek

Aşağıda verilen denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

a. $x^2 + 11x - 60 = 0$ **b.** $3x^2 - 2x - 8 = 0$

c. $4x^2 - 5x + 1 = 0$

a. $x^2 + 11x - 60 = 0$ denkleminde $x^2 + 11x - 60$ ifadesinin çarpanlarını bulalım.

$x^2 + 11x - 60$

x +15
x −4

−60 ın çarpanlarından +15 ve −4 seçilirse bu sayıların toplamı 11 olur.

Bu durumda, $x^2 + 11x - 60 = (x + 15)(x - 4)$ tür.

$x^2 + 11x - 60 = 0 \Rightarrow (x + 15)(x - 4) = 0 \Rightarrow x + 15 = 0$ veya $x - 4 = 0$ olur.

$x + 15 = 0 \Rightarrow x = -15$, $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ tür.

Bu durumda denklemin kökleri $x_1 = -15$ ve $x_2 = 4$, denklemin çözüm kümesi $\{-15, 4\}$ olarak bulunur.

b. $3x^2 - 2x - 8 = 0$ denkleminde $3x^2 - 2x - 8$ ifadesinin çarpanlarını bulalım.

$3x^2 - 2x - 8$

3x +4
x −2

−8 in çarpanları +4 ve −2, 3 ün çarpanları 3 ve 1 olarak seçilirse bu sayıların yanda gösterilen çapraz çarpımlarının toplamı x in katsayısı olan −2 yi verir.

Bu durumda $3x^2 - 2x - 8 = (3x + 4)(x - 2)$ dir.

$3x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (3x + 4)(x - 2) = 0 \Rightarrow 3x + 4 = 0$ veya $x - 2 = 0$ olur.

$3x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$, $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ dir.

Verilen denklemin kökleri $x_1 = -\frac{4}{3}$ ve $x_2 = 2$, denklemin çözüm kümesi $\left\{-\frac{4}{3}, 2\right\}$ olarak bulunur.

c. $4x^2 - 5x + 1 = 0$ denkleminde $4x^2 - 5x + 1$ ifadesinin çarpanlarını bulalım.

$4x^2 - 5x + 1$

4x −1
x −1

+1 in çarpanları −1 ve −1, 4 ün çarpanları 4 ve 1 olarak seçilirse bu sayıların çapraz çarpımlarının toplamı x in katsayısı olan −5 i verir.

Bu durumda $4x^2 - 5x + 1 = (4x - 1)(x - 1)$ olur.

DİKKAT

$ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden denkleminin kökleri bulunurken $(px + m)(kx + n) = 0$ şeklinde çarpanlarına ayrılır. Bu ayırma işleminde bulunan her bir çarpanın kökü ikinci dereceden denkemin de köküdür.

$4x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow (4x - 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow 4x - 1 = 0$ veya $x - 1 = 0$ dır.

$4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$, $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ dir.

Verilen denklemin kökleri $x_1 = \frac{1}{4}$ ve $x_2 = 1$, denklemin çözüm kümesi $\left\{\frac{1}{4}, 1\right\}$ bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $x^2 - 9x + 8 = 0$ **b.** $2x^2 - x - 3 = 0$ **c.** $6x^2 - 5x - 6 = 0$

6. Örnek

Yerden 2 m yükseklikten yukarı atılan bir basketbol topunun atıldıktan t saniye sonraki yerden yüksekliği $-t^2 + 3t + 2$ ifadesi ile verilmektedir. Topun hangi saniyelerde 4 m yükseklikte olacağını bulalım.

t. saniyede $(-t^2 + 3t + 2)$m yüksekte olan topun hangi saniyelerde 4 m yüksekte olacağını bulacağız.

$-t^2 + 3t + 2 = 4$ denklemini çözmeliyiz.

$-t^2 + 3t + 2 - 4 = 0 \Rightarrow -t^2 + 3t - 2 = 0$ olur.

$-t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow (-t + 2)(t - 1) = 0$

$-t \quad +2$

$t \quad -1$

$\Rightarrow t_1 = 2$ ve $t_2 = 1$ bulunur.

O hâlde top 1. ve 2. saniyelerde yerden 4 m yükseklikte bulunur.

Sıra Sizde

"6. Örnek"teki topun fırlatıldıktan kaç saniye sonra yerden tekrar 2 m yüksekte olacağını bulunuz.

7. Örnek

$\frac{4}{25}x^2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Verilen denklemi $\left(\frac{2}{5}x\right).\left(\frac{2}{5}x\right) = 0$ veya $\left(\frac{4}{25}x\right).x = 0$ şeklinde yazabiliriz.

Her iki durumda da çarpanlar sıfıra eşitlendiğinde $x_1 = x_2 = 0$ elde edilir. Denklemin çözüm kümesi $\{0\}$ bulunur.

Sıra Sizde

$\frac{9}{16}x^2=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

8. Örnek

$9x^2-12x+4=0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$9x^2-12x+4=(3x)^2-2.3x.2+2^2$ olduğundan $9x^2-12x+4$ ifadesi tam karedir. Buna göre,

$9x^2-12x+4=(3x-2)(3x-2)$ olur.

$(3x-2)(3x-2)=0$ ise her iki çarpan da sıfıra eşitlendiğinde,

$x_1=x_2=\frac{2}{3}$ elde edilir. Denklemin çözüm kümesi $\left\{\frac{2}{3}\right\}$ olarak bulunur.

HATIRLAYALIM

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ dir.

Sıra Sizde

$4x^2+20x+25=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

9. Örnek

$4x^2-1=0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

1. Yol

$4x^2-1$ ifadesi iki kare farkı özdeşliğinden yararlanılarak çarpanlarına ayrılabilir.

$4x^2-1=(2x)^2-1^2=(2x+1)(2x-1)$

$2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$, $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ dir.

Denklemin çözüm kümesi $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ olarak bulunur.

2. Yol

$4x^2-1=0$ denklemini aşağıdaki şekilde de çözebiliriz.

$4x^2-1=0 \Rightarrow 4x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow |x|=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ veya $x=-\frac{1}{2}$ olur.

Denklemin çözüm kümesi $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ bulunur.

Sıra Sizde

$x^2-25=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

10. Örnek

$x^2 - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$x^2 - 3$ ifadesini $x^2 - 3 = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ şeklinde yazabiliriz.

$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0 \Rightarrow x+\sqrt{3}=0$ veya $x-\sqrt{3}=0$ dır.

$x+\sqrt{3}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{3}$, $x-\sqrt{3}=0 \Rightarrow x=\sqrt{3}$ olur.

Bu durumda denklemin kökleri $x_1 = -\sqrt{3}$ ve $x_2 = \sqrt{3}$, denklemin çözüm kümesi $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ bulunur.

Sıra Sizde

$x^2 - 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Tam Kareye Tamamlama Yöntemi ile Denklem Çözümü

Tam kareye tamamlama yöntemi ile $ax^2 + bx + c = 0$ denklemi çözülürken $ax^2 + bx + c$ ifadesi düzenlenerek veya terim eklenip çıkarılarak denklem içinde tam kare bir bölüm elde edilir. Elde edilen ifade iki kare farkı özdeşliğinden yararlanılarak çarpanlarına ayrılır ve çarpanlar sıfıra eşitlenerek çözüm kümesi bulunur.

11. Örnek

$x^2 + 4x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Denklemin sol tarafına 3 ekleyip çıkaralım.

$x^2 + 4x + 1 + 3 - 3 = 0$

$\underbrace{x^2 + 4x + 4} - 3 = 0$

$(x+2)^2 - 3 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$

$\Rightarrow [(x+2) + \sqrt{3}] . [(x+2) - \sqrt{3}] = 0$ olur.

$(x+2) + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3} - 2$

$(x+2) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3} - 2$ bulunur.

Denklemin kökleri $x_1 = -\sqrt{3} - 2$ ve $x_2 = \sqrt{3} - 2$ dir.

Denklemin çözüm kümesi $\{-\sqrt{3} - 2, \sqrt{3} - 2\}$ bulunur.

Sıra Sizde

$x^2 - 2x - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

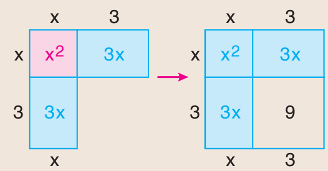
TARİH KÖŞESİ

Harezmi

(780 – 850)

(Temsilî resimdir.)

M.S. 830'lu yıllarda Harezmi ikinci dereceden denklemleri tam kareye tamamlama yöntemini kullanarak aşağıdaki gibi çözüyordu.



Denklem $x^2 + 6x = 16$ olsun. Harezmi x^2 ifadesini kenar uzunluğu x br olan karenin alanı; $6x$ ifadesini ise kenar uzunlukları 3 br ve x br olan iki dikdörtgenin alanı olarak düşünmüş $x^2 + 6x$ ifadesini yukarıda verilen ilk şekildeki gibi geometrik olarak modellemiştir.

Daha sonra bu modeli ikinci şekildeki gibi kareye tamamlamıştır.İkinci şekilde $x^2 + 6x = 16$ olduğundan toplam alan $16 + 9 = 25$ br^2 olur.

Alanı 25 br^2 olan karenin kenar uzunluğunun 5 br olmasından hareketle $x + 3 = 5$ ve $x = 2$ bulunmuştur. Harezmi geometrik olarak çözüm getirdiği bu yöntemle sadece pozitif köklere ulaşmıştır.

Kaynak: https://islamansiklopedisi.org.tr/harizmi-muhammed-b-musa

12. Örnek

$x^2 + 6x + 10 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$x^2 + 6x + 10$ ifadesini düzenleyelim.

$\underbrace{x^2+6x+9}+1=0$

$(x+3)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x+3)^2 = -1$ olur.

Karesi -1 olan gerçek sayı olmadığından $x^2 + 6x + 10 = 0$ denkleminin gerçek (reel) sayılarda kökü yoktur. Çözüm kümesi $\varnothing$ dir.

Sıra Sizde

$x^2 - 10x + 27 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$ax^2 + bx + c = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Genel Çözümü

13. Örnek

$a \neq 0$ olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ biçimindeki denklemlerin köklerini veren formülü oluşturalım.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Eşitliğin sol tarafına $\dfrac{b^2}{4a^2}$ ekleyip çıkaralım.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0 \text{ elde edilir.}$$

Bu ifadeyi iki kare farkı özdeşliğinden yararlanarak çarpanlarına ayıralım.

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]=0$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \text{ veya } \left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \text{ olur.}$$

Denklemin kökleri,

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ ve } x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ bulunur.}$$

14. Örnek

$x^2 + 2x - 15 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$x^2 + 2x - 15 = 0$ denkleminde $x^2 + 2x - 15$ ifadesinin çarpanlarını bulalım.

$x^2 + 2x - 15 = (x + m)(x + n)$ olsun. m ve n sayılarının çarpımı –15, toplamları x in katsayısı olan 2 yi vermelidir. –15 in çarpanlarından +5 ve –3 bu şartı sağlar. O hâlde;

$$x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3) \text{ tür.}$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ +5 \\ -3 \end{matrix}$$

$(x + 5)(x - 3) = 0 \Rightarrow x + 5 = 0$ veya $x - 3 = 0$ olmalıdır.

$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$, $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ olur.

Denklemin kökleri $x_1 = -5$ ve $x_2 = 3$; denklemin çözüm kümesi $\{-5, 3\}$ bulunur.

Sıra Sizde

$a^2 - a - 20 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$a \neq 0$ için $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri $x_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ formülü ile bulunabilir.

Burada $b^2 - 4ac$ ifadesine denklemin **diskriminantı** denir ve Δ ile gösterilir.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\Delta = b^2 - 4ac$ ise $x_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$ olur.

15. Örnek

Aşağıda verilen denklemlerin köklerini diskriminant kullanarak bulalım.

a. $x^2 - x - 3 = 0$

b. $2x^2 + x - 4 = 0$

c. $x^2 + 6x + 9 = 0$

d. $x^2 + 3x + 4 = 0$

a. $x^2 - x - 3 = 0$ denkleminde, $a = 1$, $b = -1$ ve $c = -3$ tür.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4.1.(-3)$$
$$= 1 + 12$$
$$= 13 \text{ olur.}$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-1)\mp\sqrt{13}}{2.1}$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{13}}{2} \text{ elde edilir.}$$

O hâlde denklemin kökleri,

$$x_1=\frac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ ve } x_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

b. $2x^2+x-4=0$ denkleminde, $a=2$, $b=1$ ve $c=-4$ tür.

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=1^2-4.2.(-4)$$
$$=1+32$$
$$=33 \text{ olur.}$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\mp\sqrt{33}}{4} \text{ elde edilir.}$$

O hâlde denklemin kökleri,

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{33}}{4} \text{ ve } x_2=\frac{-1+\sqrt{33}}{4} \text{ olarak bulunur.}$$

c. $x^2+6x+9=0$ denkleminde, $a=1$, $b=6$ ve $c=9$ dur.

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=6^2-4.1.9$$
$$=36-36$$
$$=0 \text{ dır.}$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-6\mp\sqrt{0}}{2}=-3 \text{ olur.}$$

Denklemin $x_1=x_2=-3$ şeklinde eşit iki kökü vardır.

d. $x^2+3x+4=0$ denkleminde, $a=1$, $b=3$ ve $c=4$ tür.

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=3^2-4.1.4$$
$$=9-16$$
$$=-7 \text{ olur.}$$

$\Delta=-7$ ve $-7<0$ olduğunda $\sqrt{\Delta}$ bir gerçek sayı olmayacağı için

$x_{1,2}=\dfrac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$ olacak şekilde x_1 ve x_2 gerçek sayıları bulunamaz.

Denklemin çözüm kümesi boş kümedir.

Sıra Sizde

Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini diskriminant kullanarak bulunuz.

a. $x^2+x-1=0$

b. $3x^2-2x+1=0$

c. $x^2+2x-1=0$

d. $3x^2+x+5=0$

TARİH KÖŞESİ

Brahmagupta

(597 – 668)

(Temsilî resimdir.)

Hint matematikçi ve gökbilimci olan Brahmagupta, matematik ve astronomi üzerine bir teorik, bir de uygulamaya yönelik iki önemli eser yazmıştır. Bu eserlerde dikkati çeken önemli bir ayrıntı sıfırın ilk kez kullanılarak işlemler yapılmasıydı.

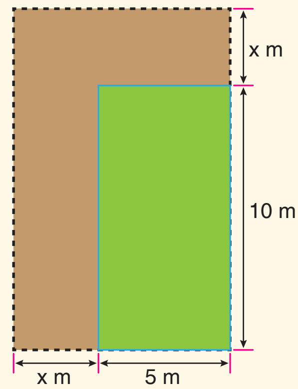
Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerin çözülebilmesi için gerek ve yeter koşullar bulan Brahmagupta, $ax^2+bx+c=0$ şeklinde ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin çözümünü de $x=\dfrac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}$ formülü ile hesaplamaktaydı.

Kaynak: http://www.dergipark.gov.tr/download/article-file/201321

16. Örnek

Hobi bahçeleri, belediyelerin belirlediği alanlarda su ve elektrik gibi altyapı hizmetleri getirildikten sonra sebze meyve üretmek için kiralanan küçük parsellere verilen addır. Özellikle büyükşehirlerde yaygınlaşan bu uygulama, şehir hayatındaki koşuşturmacalardan sıkılan ve doğa ile iç içe olmak isteyen insanlar için bulunmaz bir fırsattır.
Fatih Bey, eni 5 m ve boyu 10 m olan dikdörtgen şeklindeki hobi bahçesinin enini ve boyunu aynı miktarda genişleterek 150 m^2 lik bir bahçeye sahip olmak istiyor. Bunun için bahçenin enini ve boyunu ne kadar genişletmesi gerektiğini bulalım.

3. Şekil



Fatih Bey bahçenin kenarlarını "3. Şekil" deki gibi x metre uzatacak olsun. Bu durumda oluşacak dikdörtgensel bahçenin eni $(x+5)$ m, boyu da $(x+10)$ m olur. Bahçenin son durumda alanı 150 m^2 olacağından,

$$(x+5)(x+10)=150 \Rightarrow x^2+15x+50=150$$
$$\Rightarrow x^2+15x-100=0$$
$$\Rightarrow (x-5)(x+20)=0 \text{ dır.}$$

$(x-5)(x+20)=0$ ise $x-5=0$ veya $x+20=0$ olmalıdır.

Bu durumda $x=5$ veya $x=-20$ olur. x bir uzunluk belirttiğinden negatif olamayacaktır. O hâlde Fatih Bey bahçenin enini ve boyunu 5 er metre genişletmelidir.

Sıra Sizde

"16. Örnek" te Fatih Bey'in bahçesinin enini boyunun 2 katı kadar uzatıp 225 m^2 lik bir bahçeye sahip olmak istediğini düşününüz. Bunun için Fatih Bey'in bahçesinin boyunu kaç metre uzatması gerektiğini bulunuz.

17. Örnek

Açık su yarışları adından da anlaşılacağı üzere deniz, göl ya da nehir gibi açık alanlarda yapılan yüzme yarışlarıdır. Bu yarışlardan en uzunu bir haftada tamamlanan ve New York (Niv York) ta bir nehirde yapılan 193 kilometrelik yarıştır. Bu yarışlarda kimi zaman akıntılara karşı da yüzen yüzücülerin dayanıklılıkları ön plana çıkmaktadır. Bir açık su yüzücüsü antrenman yaparken kıyıya doğru saniyede 2 birim akıntının olduğu bir denizde kıyıdan sabit hızla 80 birim açılıp tekrar bulunduğu noktaya 30 saniyede gelebilmektedir. Buna göre sporcunun hızının saniyede kaç birim olduğunu bulalım.

Sporcunun saniyedeki hızı x birim olsun. Yüzücü, açılırken akıntıya karşı yüzecek ve saniyedeki hızı $(x-2)$ birim, dönerken de akıntıyı arkasına alacak ve saniyedeki hızı $(x+2)$ birim olacaktır.

Buna göre gidiş ve dönüşte 80 er birim yüzen yüzücünün gidiş ve dönüş süreleri, alınan yolun hıza oranı olarak, $t_{gidiş}=\frac{80}{x-2}$ ve $t_{dönüş}=\frac{80}{x+2}$ şeklinde yazılabilir.

Sporcunun gidiş ve dönüş sürelerinin toplamı 30 saniye olduğundan,

$$t_{gidiş}+t_{dönüş}=30 \Rightarrow \frac{80}{x-2}+\frac{80}{x+2}=30$$

$$\Rightarrow \underset{(x+2)}{\frac{80}{x-2}}+\underset{(x-2)}{\frac{80}{x+2}}-\underset{(x+2)(x-2)}{\frac{30}{1}}=0$$

$$\Rightarrow \frac{80(x+2)+80(x-2)-30(x+2)(x-2)}{x^2-4}=0$$

$$\Rightarrow \frac{-30x^2+160x+120}{x^2-4}=0$$

$$\Rightarrow -30x^2+160x+120=0 \text{ ve } x^2-4\neq 0$$

$$\Rightarrow (30x+20)(-x+6)=0 \text{ ve } (x-2)(x+2)\neq 0$$

$$\Rightarrow x=-\frac{2}{3} \text{ veya } x=6 \text{ ve } x\neq 2 \text{ ve } x\neq -2 \text{ bulunur.}$$

Hız değeri negatif olamayacağından sporcunun saniyedeki hızı 6 birimdir.

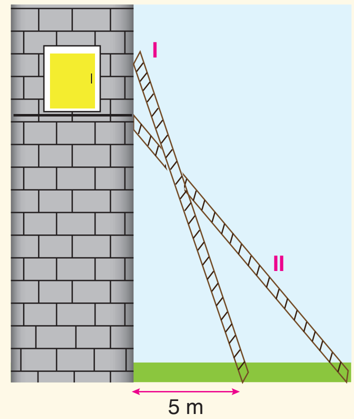
Sıra Sizde

"17. Örnek"te kıyıya doğru akıntının hızının saniyede 2 birim, sabit hızla yüzülen ve kıyıya en uzak mesafenin 125 birim olduğunu düşününüz. Bu durumda yüzücünün bulunduğu noktaya 25 saniyede gelmesi için hızının saniyede kaç birim olması gerektiğini bulunuz.

18. Örnek

13 m uzunluğunda bir merdivenin "4. Şekil" deki gibi ayakları duvardan 5 m uzakta durmaktadır. Merdivenin ayakları ve tepesi aynı miktarda yer değiştirerek merdiven pencerenin hizasına getiriliyor. Bunun için merdivenin ayaklarının duvardan kaç m uzaklaştırılması gerektiğini bulalım.

4. Şekil



Verilenleri "5. Şekil"deki gibi gösterebiliriz. Merdivenin ilk konumda yerden kaç m yukarıya dayandığını bulalım. Bunun için Pisagor teoremini kullanabiliriz.

$$h^2+5^2=13^2 \Rightarrow h^2=169-25$$
$$\Rightarrow h^2=144$$
$$\Rightarrow h=12 \text{ m olur.}$$

Merdiven ikinci konuma getirildiğinde ucunun yerden yüksekliği $(12 - x)$ m, ayaklarının duvardan uzaklığı $(5 + x)$ m olur.

2. durum için de Pisagor teoremini uygulayalım.

$(12 - x)^2 + (5 + x)^2 = 13^2$

$\Rightarrow$ $144 - 24x + x^2 + 25 + 10x + x^2 = 169$

$\Rightarrow$ $2x^2 - 14x = 0$

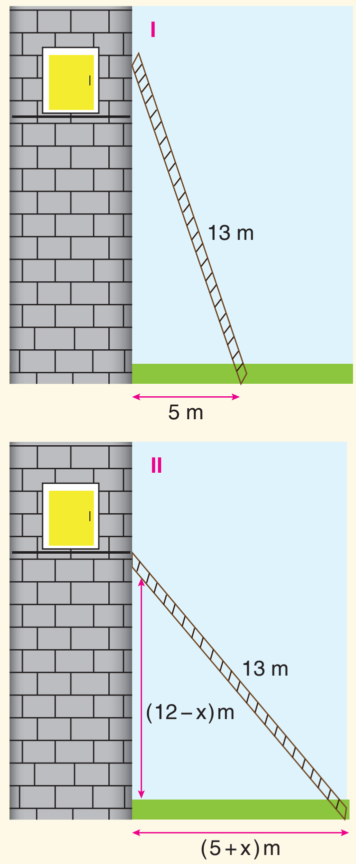
$2x^2 - 14x = 0$ denklemini diskriminant kullanarak çözelim.

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 196 - 4.2.0 = 196$ bulunur.

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{14 - \sqrt{196}}{4} = 0 \text{ ve } x_2 = \frac{14 + \sqrt{196}}{4} = 7 \text{ olur.}$$

2. durum için merdivenin ayakları duvardan 7 m uzaklaştırılmalıdır.

5. Şekil



İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerde Köklerin Varlığı

$a \neq 0$ için $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere;

- $\Delta > 0$ ise denklemin birbirinden farklı iki gerçek kökü vardır. Bu kökler $x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$ dır.
- $\Delta = 0$ ise denklemin eşit iki gerçek kökü (çakışık iki kökü veya iki katlı kökü) vardır. Bu kökler $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ dır.
- $\Delta < 0$ ise denklemin gerçek kökü yoktur. Başka bir deyişle, bu denklemin gerçek sayılarda çözüm kümesi boş kümedir.

19. Örnek

Aşağıda verilen denklemlerin köklerinin varlığını inceleyelim.

a. $3x^2 - 2x - 1 = 0$ **b.** $x^2 - 2x + 2 = 0$ **c.** $x^2 + 4x + 4 = 0$

a. $3x^2 - 2x - 1 = 0$ denkleminde diskriminantı bulalım.

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4.3.(-1) = 4 + 12 = 16$ dır.

$16 > 0$ olduğundan $3x^2 - 2x - 1 = 0$ denkleminin birbirinden farklı iki gerçek kökü vardır.

b. $x^2 - 2x + 2 = 0$ denkleminde,

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4.1.2 = 4 - 8 = -4$ tür.

$\Delta < 0$ olduğundan $x^2 - 2x + 2 = 0$ denkleminin gerçek kökü yoktur. Denklemin çözüm kümesi boş kümedir.

c. $x^2 + 4x + 4 = 0$ denkleminde,

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (4)^2 - 4.1.4 = 16 - 16 = 0$

$\Delta = 0$ olduğundan $x^2 + 4x + 4 = 0$ denkleminin birbirine eşit iki kökü vardır.

DİKKAT

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $ax^2 + bx + c$ ifadesi tam kare ise $\Delta = 0$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen denklemlerin köklerinin varlığını inceleyiniz.

a. $x^2 + 6x + 11 = 0$ **b.** $x^2 - 13x - 3 = 0$ **c.** $4x^2 + 12x + 9 = 0$

20. Örnek

$2x^2 - 4x + m - 5 = 0$ denkleminin iki farklı gerçek kökü olduğuna göre m nin alabileceği en büyük tam sayı değerini bulalım.

$2x^2 - 4x + m - 5 = 0$ denkleminin iki farklı gerçek kökünün olması için $\Delta > 0$ olmalıdır.

$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0$

$\Rightarrow (-4)^2 - 4.2.(m - 5) > 0$

$\Rightarrow 16 - 8m + 40 > 0$

$\Rightarrow -8m + 56 > 0$

$\Rightarrow m < 7$ olur.

O hâlde m nin alabileceği en büyük tam sayı değeri 6 dır.

Sıra Sizde

$(m + 2)x^2 - 3x - 4 = 0$ denkleminin iki farklı gerçek kökü olduğuna göre m nin alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

21. Örnek

$ax^2 + 4x - 3 = 0$ denkleminin çakışık iki kökünün olması için a nın kaç olması gerektiğini bulalım.

$ax^2 + 4x - 3 = 0$ denkleminin çakışık iki kökünün olması için $\Delta = 0$ olmalıdır.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow 4^2 - 4.a.(-3) = 0$$

$$\Rightarrow 16 + 12a = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$x^2 - x + m + 1 = 0$ denkleminin çakışık iki kökünün olması için m nin kaç olması gerektiğini bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. $2x^{n-4} + 4x^2 + 3x + 1 = 0$ denklemi ikinci dereceden bir denklem olduğuna göre n nin alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

2. $x^2 + (t+1)x + 2t + 3 = 0$ denkleminin bir kökü 3 olduğuna göre t değerini bulunuz.

3. Aşağıdaki denklemlerin diskriminantlarını bulunuz.

a. $x^2 - 5x - 1 = 0$ **b.** $x^2 + 2x + 2 = 0$ **c.** $4x^2 - x - 1 = 0$

4. Aşağıdaki denklemler ile çözüm kümelerini eşleştiriniz.

a.	$4x^2 + 20x + 25 = 0$	**I.**	$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$
b.	$6x^2 - x - 1 = 0$	**II.**	$\varnothing$
c.	$2x^2 - 5x + 2 = 0$	**III.**	$\{-1, 1\}$
d.	$4x^2 - 1 = 0$	**IV.**	$\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$
e.	$5x^2 - 5 = 0$	**V.**	$\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$
f.	$4x^2 = 0$	**VI.**	$\{0\}$
g.	$x^2 - 2x + 2 = 0$	**VII.**	$\{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$
h.	$x^2 - 2x - 1 = 0$	**VIII.**	$\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

5. $x^2-6x+3m=0$ denkleminin diskriminantı 12 olduğuna göre m kaçtır?

6. Aşağıdaki denklemler için verilen ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

I. $x^2+2x-11=0$ **II.** $x^2-4=0$

III. $x^2+6x+15=0$ **IV.** $x^2-3x+2=0$

V. $x^2+6x+9=0$ **VI.** $x^2+2x-2=0$

a. ☐ I. denklemin iki farklı gerçek kökü vardır.

b. ☐ II. denklemin çakışık iki kökü vardır.

c. ☐ II ve IV. denklemlerin birer kökü ortaktır.

d. ☐ III denkleminde $\Delta<0$ dır.

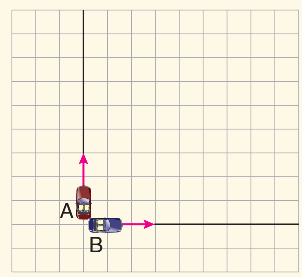
e. ☐ V denkleminde $\Delta=0$ dır.

f. ☐ VI denkleminde $\Delta=2\sqrt{3}$ tür.

7. $x^2-2x+m+3=0$ denkleminin gerçek kökleri olmadığına göre m nin değer aralığını bulunuz.

8. Aynı noktadaki iki araç aynı anda, "6. Şekil"de gösterilen doğrultularda hareket ediyorlar. B aracı, A aracından saatte 5 km daha fazla hız yapmaktadır. Hareketlerinden 2 saat sonra aralarındaki mesafe 50 km olduğuna göre araçların hızlarını bulunuz.

6. Şekil



9. Batan bir gemiden yaşam botu ile kurtulan bir kazazede, botta bulduğu işaret fişeğini ateşlemiştir. Ateşlendikten t saniye sonra fişeğin yerden yüksekliği, $h=450t-10t^2$ ifadesi ile bulunabiliyorsa fişek kaç saniye havada kalmıştır? Neden?

10. İstanbul Boğazı'na inşa edilecek tüp geçit için A firması Avrupa yakasından, B firması da Asya yakasından kazı çalışmalarına başlamıştır. Teknik olarak daha iyi makinelere sahip olan A firması, tüneli tek başına B firmasından 6 sene daha kısa sürede kazabilecektir. Her iki firma, tüneli 4 senede kazabileceklerine göre A firması bu tüneli kaç yılda kazar?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

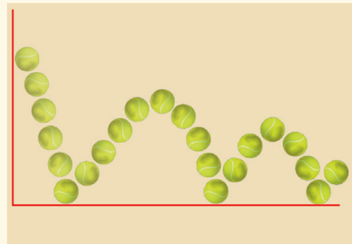
11. $x^2+x-1=0$ denkleminin köklerinden küçük olanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-1-\sqrt{6}$ B) $-1-\sqrt{5}$ C) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$ D) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ E) $-1+\sqrt{6}$

12. $t\neq 0$ olmak üzere, $t^2x^2-(2t+1)x+1$ ifadesinin tam kare olması için t kaç olmalıdır?

22. Örnek

Bir tenis topunun birinci ve ikinci sıçrayışı arasında izlediği yörünge $y = 6x - x^2$ fonksiyonu ile veriliyor. Bu fonksiyonda y topun yerden yüksekliğini; x, topun ilk sıçramadan sonra katettiği yatay mesafeyi göstermektedir. $y = 9$, $y = 5$ ve $y = 10$ için topun katettiği yatay mesafeleri (x) bulalım.



$y = 9$ için, $y = 9 \Rightarrow 9 = 6x - x^2 \Rightarrow -x^2 + 6x - 9 = 0$ olur.

$\Delta = 6^2 - 4.(-1).(-9) = 0$ dır.

$x_1 = x_2 = \dfrac{-6 \mp \sqrt{0}}{2.(-1)} = \Rightarrow x_1 = x_2 = 3$ bulunur.

Top 9 m yüksekte iken yatayda 3 m mesafe katetmiş olur.

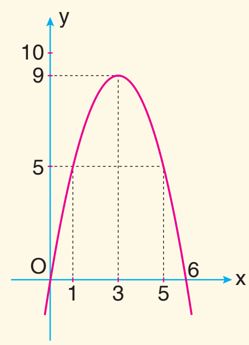
$y = 5$ için, $y = 5 \Rightarrow 5 = 6x - x^2 \Rightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0$ olur.

$\Delta = 6^2 - 4.(-1).(-5) = 16 \Rightarrow \Delta > 0$ dır.

$x_{1,2} = \dfrac{-6 \mp \sqrt{16}}{2.(-1)} \Rightarrow x_1 = \dfrac{-6 + \sqrt{16}}{-2} = 1$, $x_2 = \dfrac{-6 - \sqrt{16}}{-2} = 5$ bulunur.

Top 5 m yüksekte iken yatayda 1 m veya 5 m mesafe katetmiş olur.

7. Şekil



$y = 10$ için, $y = 10 \Rightarrow 10 = 6x - x^2 \Rightarrow -x^2 + 6x - 10 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4.(-1).(-10) = -4 \Rightarrow \Delta < 0$ olur.

Bu durumda $-x^2 + 6x - 10 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulamayız.

$y = -x^2 + 6x$ fonksiyonunun grafiğini incelediğimizde $x_1 = 1$ ve $x_2 = 5$ için $y = 5$ ve $x_1 = x_2 = 3$ için $y = 9$ olduğunu görürüz.

$y = 10$ olduğunda ise $-x^2 + 6x = 10$ olacak biçimde x gerçek sayısının bulunmadığını görürüz.

$\Delta < 0$ olması durumunda denklemin gerçek sayılar kümesinde çözümünün olmadığını belirtmiştik. Bu durumu daha ayrıntılı inceleyelim.

$-x^2 + 6x - 10 = 0$ denkleminde $\Delta = -4$ ise

$x_{1,2} = \dfrac{-6 \mp \sqrt{-4}}{2.(-1)} = \dfrac{-6 \mp \sqrt{4}.\sqrt{-1}}{-2} = \dfrac{-6 \mp 2\sqrt{-1}}{-2} = 3 \mp \sqrt{-1}$ bulunur.

$x_{1,2} = 3 \mp \sqrt{-1}$ ifadesinde $\sqrt{-1}$ in gerçek sayı karşılığı olmadığından x_1 ve x_2 gerçek sayıları bulunamaz.

Gerçek sayılar kümesi karesi negatif olan sayıları da içeren yeni bir sayı kümesine genişletilirse $\Delta < 0$ olması durumunda denklemlerin çözüm kümelerini bulabiliriz.

Sıra Sizde

"22. Örnek"te $y = 8$ için topun yatayda kaç m yol aldığını bulunuz.

Sanal Birim	$\sqrt{-1}$ sayısı **sanal birim** olarak adlandırılır. $i = \sqrt{-1}$ veya $i^2 = -1$ biçiminde gösterilir.

23. Örnek

$x^2 + 8 = 0$ denkleminin karmaşık sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

Verilen denklemin diskriminantı, $\Delta = 0^2 - 4.1.8 = -32 \Rightarrow \Delta < 0$ dır. O hâlde $x^2 + 8 = 0$ denkleminin gerçek sayı kökleri bulunamaz. Ancak kökler $\sqrt{-1} = i$ olacak biçimde sanal birim kullanılarak bulunabilir.

$$x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 = -8 \Rightarrow |x| = \sqrt{-8} \Rightarrow x_{1,2} = \mp\sqrt{-8}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{8}.\sqrt{-1}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \mp 2\sqrt{2}\,i \text{ bulunur.}$$

$x^2 + 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\{-2\sqrt{2}i,\ 2\sqrt{2}i\}$ olur.

Sıra Sizde

$x^2 + 9 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

24. Örnek

$x^2 - 2x + 4 = 0$ denkleminin karmaşık sayılardaki çözüm kümesini bulalım.

$x^2 - 2x + 4 = 0$ denkleminin köklerini diskriminant yardımı ile bulalım.

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4.1.4 = 4 - 16 = -12$ olur.

$x_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$ ifadesinde $i = \sqrt{-1}$ sanal birimini kullanalım.

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \mp \sqrt{-12}}{2.1} \Rightarrow x_1 = \frac{2 - \sqrt{12}.\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}.i}{2} = 1 - \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{2 + \sqrt{12}.\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}.i}{2} = 1 + \sqrt{3}i \text{ dir.}$$

Denklemin çözüm kümesi $\{1 - \sqrt{3}i,\ 1 + \sqrt{3}i\}$ bulunur.

Sıra Sizde

$2x^2 + x + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Karmaşık Sayılar	a, $b \in \mathbb{R}$ ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $a + ib$ biçimindeki sayılara **karmaşık sayılar** denir. Karmaşık sayılardan oluşan kümeye **karmaşık sayılar kümesi** denir. Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir. $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$ $z \in \mathbb{C}$ ve $z = a + ib$ olmak üzere; **a** karmaşık sayının **gerçek (reel) kısmı**dır ve $\text{Re}(z) = a$ biçiminde gösterilir. **b** karmaşık sayının **sanal (imajiner) kısmı**dır ve $\text{İm}(z) = b$ biçiminde gösterilir.

DİKKAT

$a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere
$z = a + ib$ için,
$\text{Im}(z) = b = 0$ olursa z bir gerçek sayı olur. Bu yüzden karmaşık sayılar kümesi, gerçek sayılar kümesini kapsar.
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

25. Örnek

$x^2 - x + 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini karmaşık sayılar kümesinde bulalım.

$x^2 - x + 2 = 0$ denkleminde $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1.2 = -7 < 0$ dır.

Bu denklemin gerçek sayılar kümesinde kökü yoktur. Ancak gerçek sayılar kümesini de kapsayan karmaşık sayılar kümesinde bu denklemin çözüm kümesini bulabiliriz. Bu durumda denklemin kökleri birer karmaşık sayı olur.

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{-7}}{2.1} = \frac{1 - \sqrt{7}.\sqrt{-1}}{2} = \frac{1 - \sqrt{7}i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{-7}}{2.1} = \frac{1 + \sqrt{7}.\sqrt{-1}}{2} = \frac{1 + \sqrt{7}i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

Denkleminin çözüm kümesi $Ç = \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i\right\}$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

$x^2 + x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini karmaşık sayılar kümesinde bulunuz.

26. Örnek

Aşağıdaki karmaşık sayıların gerçek ve sanal kısımlarını bulalım.

a. $4 - 3i$ **b.** $-2 - i$ **c.** $\frac{3+5i}{2}$

d. $8i$ **e.** $-\sqrt{2}$ **f.** $\sqrt{5} - \sqrt{-3}$

a. $z = 4 - 3i \Rightarrow Re(z) = 4$ ve $Im(z) = -3$ tür.

b. $z = -2 - i \Rightarrow Re(z) = -2$ ve $Im(z) = -1$ dir.

c. $z = \frac{3+5i}{2} \Rightarrow Re(z) = \frac{3}{2}$ ve $Im(z) = \frac{5}{2}$ dir.

d. $z = 8i \Rightarrow Re(z) = 0$ ve $Im(z) = 8$ dir.

e. $z = -\sqrt{2} \Rightarrow Re(z) = -\sqrt{2}$ ve $Im(z) = 0$ dır.

f. $z = \sqrt{5} - \sqrt{-3} = \sqrt{5} - \sqrt{3}.\sqrt{-1} = \sqrt{5} - \sqrt{3}i$ dir.

$z = \sqrt{5} - \sqrt{3}i \Rightarrow Re(z) = \sqrt{5}$ ve $Im(z) = -\sqrt{3}$ tür.

Sıra Sizde

$z_1 = 2\sqrt{-4} - 1$ ve $z_2 = \sqrt{3} - i$ olmak üzere $Re(z_1) + Im(z_2)$ değerini bulunuz.

Bir Karmaşık Sayının Eşleniği	$z = a + ib$ karmaşık sayısının sanal kısmının işaretinin değiştirilmesi ile elde edilen **$a - ib$** karmaşık sayısına z karmaşık sayısının **eşleniği** denir ve $\overline{z}$ ile gösterilir.

ETKİNLİK

- Aşağıdaki tabloda verilen ikinci dereceden bir bilinmeyenli, gerçek katsayılı denklemlerin köklerini karmaşık sayı olarak bulunuz. Bulduğunuz kökleri tabloya yazınız.

Denklem	Δ	x_1	x_2
$x^2 - 4x + 6 = 0$			
$x^2 + x + 1 = 0$			
$2x^2 - x + 3 = 0$			
$x^2 + 2x + 2 = 0$			

➢ Bulduğunuz kökleri inceleyiniz. İkinci dereceden bir bilinmeyenli gerçek katsayılı denklemlerin sanal köklerinin birbiri ile ilişkisini açıklayınız.

27. Örnek

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\Delta < 0$ olması durumunda elde edilen (karmaşık sayı olan) sanal köklerini inceleyelim.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $b^2 - 4ac < 0$ ise denklemin gerçek kökünün olmadığını ancak karmaşık sayı olacak biçimde köklerin bulunabileceğini biliyoruz.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}\,.\,\overset{\overset{i}{\uparrow}}{\boxed{\sqrt{-1}}}}{2a} = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}i \qquad (\Delta < 0 \text{ ise } -\Delta > 0 \text{ olur.})$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}\,.\,\overset{\overset{i}{\uparrow}}{\boxed{\sqrt{-1}}}}{2a} = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}i \text{ olur.}$$

> İkinci dereceden bir bilinmeyenli gerçek katsayılı denklemlerin sanal kökleri birbirinin eşleniğidir.

28. Örnek

$x^2 + 2x + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1 = \sqrt{3}i - 1$ ise $\text{İm}(x_1) - \text{İm}(x_2)$ değerini bulalım.

$x^2 + 2x + 4 = 0$ gerçek katsayılı denkleminin bir kökü $x_1 = \sqrt{3}i - 1$ ise diğer kök bunun eşleniğidir.

$x_1 = \sqrt{3}i - 1 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{3}i - 1$ olur.

Bu durumda $\text{İm}(x_1) = \sqrt{3}$ ve $\text{İm}(x_2) = -\sqrt{3}$ tür. O hâlde

$\text{İm}(x_1) - \text{İm}(x_2) = \sqrt{3} - (-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ bulunur.

Sıra Sizde

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.
$x_1 = \sqrt{2} - i$ ise $\text{Re}(x_1) + \text{Re}(x_2)$ değerini bulunuz.

29. Örnek

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2 - 4x + a = 0$ denkleminin köklerinden biri $2 - i$ dir. Buna göre a sayısını bulalım.

$x^2 - 4x + a = 0$ denkleminin bir kökü $2 - i$ ise bu değeri denklemde x yerine yazalım.

$(2 - i)^2 - 4(2 - i) + a = 0$ olmalıdır. Bu durumda,

$$4 - \cancel{4i} + i^2 - 8 + \cancel{4i} + a = 0 \qquad (i^2 = -1)$$

$$-5 + a = 0$$

$$a = 5 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2 - 6x + a = 0$ denklemini köklerinden biri $3 - i$ dir. Buna göre a sayısını bulunuz.

30. Örnek

$a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2 + ax + 25 = 0$ denkleminin kökleri $b + 4i$ ve $3 + ci$ dir. Buna göre $a + b + c$ toplamını bulalım.

$b + 4i$ ve $3 + ci$ birbirinin eşleniği olmalıdır. Bu durumda,

$b + 4i = 3 - ci \Rightarrow b = 3$ ve $c = -4$ olur.

$x^2 + ax + 25 = 0$ denkleminin köklerinden $3 + 4i$ değerini denklemde x yerine yazalım.

$$(3 + 4i)^2 + a(3 + 4i) + 25 = 0 \Rightarrow 9 + 24i + 16i^2 + 3a + 4ai + 25 = 0 \qquad (i^2 = -1)$$

$$\underbrace{3a + 18}_{0} + i\underbrace{(4a + 24)}_{0} = 0$$

$$a = -6 \text{ bulunur.}$$

$a + b + c = -6 + 3 + (-4) = -7$ olur.

Sıra Sizde

$a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2 - ax + 13 = 0$ denkleminin kökleri $-2 + bi$ ve $c - 3i$ dir. Buna göre $a + b + c$ toplamını bulunuz.

31. Örnek

a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2 + ax + b = 0$ denkleminin bir kökü $-1+\sqrt{2}i$ dir. Bu denklemin diğer kökünün 2 fazlası $x^2 + cx + d = 0$ denkleminin bir köküdür. Buna göre denklemlerde verilmeyen katsayıları bulalım.

$x^2 + ax + b = 0$ denkleminin bir kökü $x_1 = -1+\sqrt{2}i$ ise diğer kök $x_2 = -1-\sqrt{2}i$ olur. Bu köklerden birini denklemde yerine yazarak a ve b sayılarını bulabiliriz.

$$x^2 + ax + b = 0 \Rightarrow (-1+\sqrt{2}i)^2 + a(-1+\sqrt{2}i) + b = 0$$

$$\Rightarrow 1-2\sqrt{2}i-2-a+\sqrt{2}ai+b=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-1-a+b)}_{0}+\underbrace{(-2\sqrt{2}+\sqrt{2}a)}_{0}i=0$$

$\Rightarrow$ $a = 2$ ve $b = 3$ bulunur.

İlk denklemin ikinci kökünün 2 fazlası ikinci denklemin kökü ise,

$x_2 = -1-\sqrt{2}i \Rightarrow x_2 + 2 = 1-\sqrt{2}i$ olur.

Bu kökü $x^2 + cx + d = 0$ denkleminde x yerine yazalım.

$$x^2 + cx + d = 0 \Rightarrow (1-\sqrt{2}i)^2 + c(1-\sqrt{2}i) + d = 0$$

$$\Rightarrow (1-2\sqrt{2}i-2)+c-c\sqrt{2}i+d=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-1+c+d)}_{0}+\underbrace{(-2\sqrt{2}-c\sqrt{2})}_{0}i=0$$

$\Rightarrow$ $c = -2$ ve $d = 3$ bulunur.

Sıra Sizde

a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2 + ax + b = 0$ denkleminin bir kökü $1 + i$ dir. Bu denklemin diğer kökünün karesi $x^2 + cx + d = 0$ denkleminin kökü olduğuna göre denklemlerde verilmeyen katsayıları bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki sayıları sanal birim kullanarak ifade ediniz.

a. $\sqrt{-50}$ **b.** $\sqrt{-30}$ **c.** $\sqrt{-\frac{1}{12}}$

d. $\frac{11}{\sqrt{-11}}$ **e.** $\sqrt{-16}-\sqrt{-4}$

2. Aşağıdaki karmaşık sayıların gerçek ve sanal kısımlarını bulunuz.

a. $z_1=-i-1$ **b.** $z_2=\frac{\sqrt{2}-i}{2}$

c. $z_3=-\sqrt{-8}$ **d.** $z_4=\frac{1-\sqrt{-32}}{\sqrt{2}}$

3. Aşağıdaki karmaşık sayıları eşlenikleri ile eşleştiriniz.

a. $1-4i$ **b.** $-\sqrt{3}\,i$ **c.** $2+i$ **d.** $\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$

I. $\sqrt{3}$ **II.** $2-i$ **III.** $\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i$ **IV.** $\sqrt{3}\,i$ **V.** $1+4i$ **VI.** $-2+i$

4. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $x^2+x+1=0$ **b.** $x^2+2x+2=0$

c. $x^2-4x+13=0$ **d.** $4x^2-4x+5=0$

5. Aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

a. ☐ İkinci dereceden bir bilinmeyenli rasyonel katsayılı bir denklemin köklerinden biri $2i-5$ ise diğer kökü $2i+5$ tir.

b. ☐ $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ dir.

c. ☐ $x^2+3x+2=0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesinde çözümü yoktur.

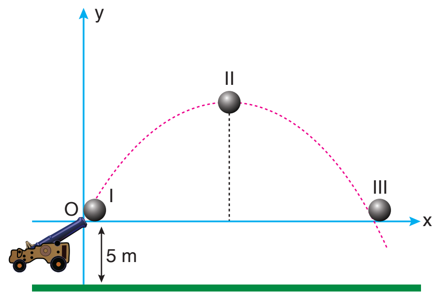
d. ☐ $4x^2+16=0$ denkleminin reel sayılar kümesinde çözümü yoktur.

6. $x^2-mx+11=0$ denkleminin köklerinden biri $3-\sqrt{2}\,i$ ise m gerçek sayısını bulunuz.

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Kökleri İle Katsayıları Arasındaki İlişkiler

"8. Şekil" de fırlatılan bir topun yörüngesi gösterilmiştir. Bu yörünge $y = f(x) = x - \frac{1}{100}x^2$ fonksiyonu ile veriliyor. Burada "y" topun fırlatıldığı andan sonra çıktığı yüksekliği, "x" ise topun yatayda aldığı mesafeyi göstermektedir.

8. Şekil



Sizce $x - \frac{1}{100}x^2 = 0$ denklemi ve denklemin çözümünden elde edilen x değerleri neyi ifade eder? Denklem çözülmeden topun II konumundaki yüksekliği ve yatayda aldığı mesafe bulunabilir mi?

Kökler Toplamı ve Kökler Çarpımı	$a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. Bu köklerin toplamı ve çarpımı ile denklemin katsayıları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır. $ax^2 + bx + c = 0$ dekleminde $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ise $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$ dır.

32. Örnek

$3x^2 + 6x + 4 = 0$ denkleminde kökler toplamını ve çarpımını bulalım.

$3x^2 + 6x + 4 = 0$ denkleminde katsayılar $a = 3$, $b = 6$, $c = 4$ tür.

Denklemin kökleri x_1 ve x_2 ise,

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{3} = -2$

$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$ bulunur.

Sıra Sizde

$x^2 + 3x - 6 = 0$ denkleminin kökler toplamını ve çarpımını bulunuz.

33. Örnek

$2x^2 + x - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $(x_1 + 2)(x_2 + 2)$ ifadesinin eşitini bulalım.

$$(x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1.x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4$$
$$= x_1.x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 \ldots \textbf{(I)}$$

$2x^2 + x - 2 = 0$ denkleminde kökler toplamı $x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}$, kökler çarpımı $x_1.x_2 = \frac{-2}{2} = -1$ dir.

Bu değerleri **I** de yerine yazarsak;

$$(x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1.x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4$$
$$= -1 + 2.\left(-\frac{1}{2}\right) + 4$$
$$= 2 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$x^2 + 4x - 8 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $(x_1 + 3)(x_2 + 3)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

34. Örnek

$2x^2 - 6x - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Denklemin köklerinin karelerinin toplamını bulalım.

$2x^2 - 6x - 3 = 0$ denkleminde $x_1 + x_2 = -\frac{-6}{2} = 3$, $x_1.x_2 = \frac{-3}{2}$ dir.

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2$ özdeşliği yazılabilir. Buna göre,

$$x_1^2 + x_2^2 = (3)^2 - 2.\left(\frac{-3}{2}\right)$$
$$= 9 + 3$$
$$= 12 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$x^2 + 2x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $(x_1 - x_2)^2$ ifadesinin eşitini bulunuz.

35. Örnek

$x^2 - 6x + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ ifadesinin eşitini bulalım.

$x^2 - 6x + 1 = 0$ denkleminde $x_1 + x_2 = 6$, $x_1 . x_2 = 1$ dir.

$$\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2 = x_1 + 2\sqrt{x_1 . x_2} + x_2$$
$$= x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 . x_2}$$
$$= 6 + 2.\sqrt{1}$$
$$= 8 \text{ olur.}$$

O hâlde $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{8}$ bulunur.

Sıra Sizde

$x^2 + 4x + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

36. Örnek

$x^2 - (m + 1)x + 6 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.
$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1 = 24$ ise m nin alabileceği değerleri bulalım.

$x^2 - (m + 1)x + 6 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise

$x_1 + x_2 = -\dfrac{-(m+1)}{1} = m + 1$, $x_1 . x_2 = \dfrac{6}{1} = 6$ dır.

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1 = 24 \Rightarrow x_1 . x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 24$$
$$\Rightarrow x_1 . x_2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 . x_2] = 24$$
$$\Rightarrow 6.[(m + 1)^2 - 2.6] = 24$$
$$\Rightarrow (m + 1)^2 - 12 = 4$$
$$\Rightarrow (m + 1)^2 = 16 \text{ olur.}$$

Bu durumda;

$m + 1 = 4 \Rightarrow m = 3$ veya $m + 1 = -4 \Rightarrow m = -5$ bulunur.

Sıra Sizde

$3x^2 + 6x + m + 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$(3x_1 - 1)(3x_2 - 1) = 22$ ise m değerini bulunuz.

37. Örnek

$2x^2 - (2m + 3)x - 16 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Kökler arasında $x_1 = -x_2^2$ bağıntısı olduğuna göre m değerini bulalım.

$2x^2 - (2m + 3)x - 16 = 0$ denkleminde $x_1 . x_2 = \frac{-16}{2} = -8$ dir.

$$x_1 = -x_2^2 \Rightarrow x_1 . x_2 = -x_2^2 . x_2$$
$$\Rightarrow x_1 . x_2 = -x_2^3$$
$$\Rightarrow -8 = -x_2^3$$
$$\Rightarrow x_2 = 2 \text{ olur.}$$

$x_2 = 2$ değeri denklemin kökü olduğundan denklemi sağlar. Buna göre,

$$2x^2 - (2m + 3)x - 16 = 0 \Rightarrow 2.2^2 - (2m + 3).2 - 16 = 0$$
$$\Rightarrow 8 - 4m - 6 - 16 = 0$$
$$\Rightarrow -4m = 14$$
$$\Rightarrow m = -\frac{7}{2} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$2x^2 - 3x + m - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere $x_1 = 2x_2$ ise m değeri kaçtır?

Kökleri Verilen İkinci Dereceden Denklemin Oluşturulması

38. Örnek

Kökleri verilen ikinci dereceden denklemin nasıl oluşturulacağını inceleyelim.

$a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$ olduğunu biliyoruz.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin her iki tarafını a ile bölelim.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 . x_2 = 0 \text{ elde edilir.}$$

Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem $x^2-(x_1+x_2)x+x_1.x_2=0$ şeklinde yazılabilir.

39. Örnek

Kökleri $x_1=-3$ ve $x_2=6$ olan ikinci dereceden denklemi yazalım.

$x_1=-3,\ x_2=6 \Rightarrow x_1+x_2=3,\ x_1.x_2=-18$ olur.
Buna göre kökleri verilen ikinci dereceden denklem,
$x^2-(x_1+x_2)x+x_1.x_2=0 \Rightarrow x^2-3x-18=0$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

Kökleri $x_1=\frac{1}{2}$ ve $x_2=-2$ olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

40. Örnek

Çözüm kümesi $\{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$ olan ikinci dereceden denklemi bulalım.

$x_1=1-\sqrt{2},\ x_2=1+\sqrt{2}$ ise $x_1+x_2=(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=2,$
$x_1.x_2=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=1-2=-1$ olur.
Buna göre çözüm kümesi verilen denklem,
$x^2-(x_1+x_2)x+x_1.x_2=0 \Rightarrow x^2-2x-1=0$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

Çözüm kümesi $\{2\sqrt{3}-1,\ -2\sqrt{3}-1\}$ olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

DİKKAT

Rasyonel katsayılı ikinci dereceden bir denklemin köklerinden biri $x_1=n+m\sqrt{k}$ ise diğeri $x_2=n-m\sqrt{k}$ olur.

41. Örnek

Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem için $x_1^2+x_2^2=25$ ve $x_1+x_2=7$ bilgileri veriliyor.

Buna göre bu ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulalım.

İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin yazılabilmesi için köklerinin toplamlarının ve çarpımlarının bilinmesi gerekir.

O hâlde $x_1^2+x_2^2=25$ ve $x_1+x_2=7$ biliniyorken $x_1.x_2$ yi bulmalıyız.

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2$

$25 = 7^2 - 2x_1.x_2$

$2x_1.x_2 = 49 - 25$

$x_1.x_2 = 12$ bulunur.

Bu durumda denklem,

$x^2 - (x_1 + x_2).x + x_1.x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem için $x_1^2 - x_2^2 = 21$ ve $x_1 + x_2 = 7$ olduğuna göre bu denklemi bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denklemi için aşağıda verilen bilgiler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

a. ☐ Denklemde a ile c ters işaretli ise denklemin gerçek kökü yoktur.

b. ☐ $b^2 < 4ac$ ise denklemin karmaşık sayı olan kökleri bulunabilir.

c. ☐ a ile b aynı işaretli ise kökler toplamı negatif olur.

d. ☐ a ile c ters işaretli ise kökler çarpımı pozitif olur.

2. $2x^2 - 6x + 3m - 5 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Kökler arasında $x_1 + 2x_2 = 7$ bağıntısı olduğuna göre m değerini bulunuz.

3. $x^2 - px + q = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Kökler arasında $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = 3$ bağıntısı olduğuna göre p ile q arasındaki bağıntıyı bulunuz.

4. $x^2 - 8x - 9 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise kökleri $2x_1 + 3$ ve $2x_2 + 3$ olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

5. $x^2 - x - 5 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olarak veriliyor. Kökleri $\frac{1}{x_1}$ ve $\frac{1}{x_2}$ olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

6. Kökleri arasında $2x_1 + 2x_2 + 3x_1.x_2 = 4$ ve $x_1 + x_2 - x_1.x_2 = 7$ bağıntıları olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

4. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 - x + a - 8 = 0$ denkleminin köklerinden biri a ise diğer kökü kaçtır?

2. $6x^2 + (2m + 1)x - 1 = 0$ denkleminin köklerinden biri $\frac{1}{2}$ ise m değerini bulunuz.

3. $x^2 + 4x + 2 = 0$ denkleminin köklerinden küçük olanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-2-\sqrt{2}$ B) $-2+\sqrt{2}$ C) $2-\sqrt{2}$

D) $2+\sqrt{2}$ E) $4+\sqrt{2}$

4. $a \neq 0$ olmak üzere $x^2 - (1 - 2a)x + a^2$ ifadesi tam karedir. Buna göre a kaçtır?

5. $t \neq -1$ olmak üzere $(t + 1)x^2 - 2tx + t - 2 = 0$ denkleminin diskriminantı 16 ise t kaçtır?

6. a ve b rasyonel sayılar olmak üzere $4x^2 + ax + b = 0$ denkleminin köklerinden biri $2-\sqrt{3}$ tür. Buna göre $a - b$ farkını bulunuz.

7. $m \neq n$ olmak üzere $x^2 - mx + n + 4 = 0$ ve $x^2 - nx + n + 4 = 0$ denklemlerinin birer kökleri ortaktır. Buna göre n değerini bulunuz.

8. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini gerçek sayılar $(\mathbb{R})$ ve karmaşık sayılar $(\mathbb{C})$ kümesinde ayrı ayrı bulunuz.

a. $x^2 + 3 = 0$ **b.** $x^2 + x - 1 = 0$

c. $x^2 + x + 1 = 0$

9. Gerçek sayılarda $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denklemi için aşağıda verilen ifadelerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.

a. ☐ Denklemde a ile c aynı işaretli ise denklemin çözüm kümesi daima boş kümedir.

b. ☐ a ile c ters işaretli ise denklemin her zaman iki gerçek kökü vardır.

c. ☐ $b^2 > 4ac$ ise denklemin çözüm kümesi iki elemanlıdır.

d. ☐ $b^2 = 4ac$ ise denklemin çözüm kümesi boş kümedir.

10. $\dfrac{-\sqrt{3}.\sqrt{-3}.\sqrt{-5}}{\sqrt{-20}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

11. $x^2 - 2x + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olarak veriliyor. $Re(x_1 + x_2)$ değerini bulunuz.

12. $x^2 - 3x + 2m - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Köklerden biri diğerinin 2 katından 1 fazla olduğuna göre m kaçtır?

13. $x^2 - tx + 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2'dir. $x_1^2 + x_2 x_1 = 4$ ise t nin alacağı değerler çarpımını bulunuz.

14. $x^2 + 2x + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Kökleri $2x_1 - 1$ ve $2x_2 - 1$ olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

15. $x^2 - (m + 4)x + 5m - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $\dfrac{6x_1}{x_2} = x_1 - 6$ olduğuna göre m kaçtır?

5. ÜNİTE

DÖRTGENLER VE ÇOKGENLER

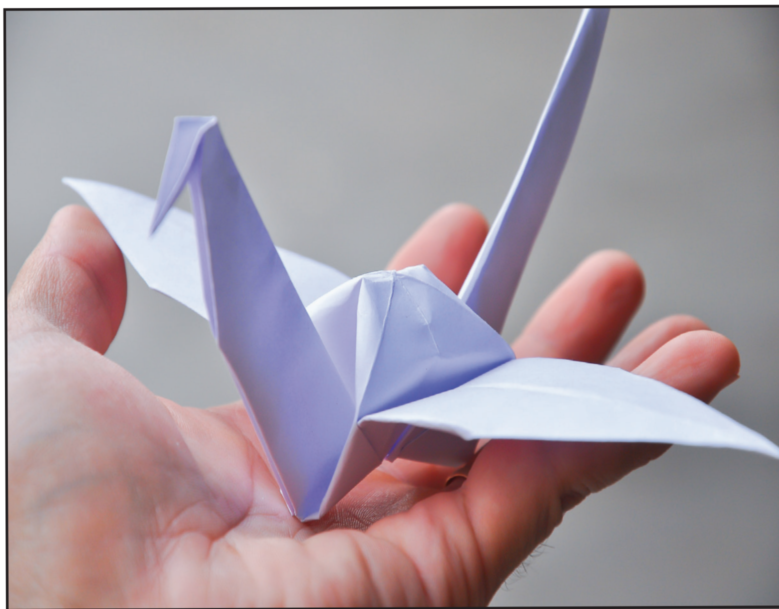
Neler Öğreneceğiz?

- Dörtgenlerin temel elemanlarını, açı özelliklerini ve alanlarını,
- Özel dörtgenlerin açı, kenar, köşegen özellikleri ile alan bağıntılarını,
- Çokgenlerin açı özelliklerini ve düzgün çokgenleri öğreneceğiz.

Neden Öğrenmeliyiz?

Matematiğin önemli bir kolu olan geometri bilimi mimarî, birçok mühendislik dalı, tasarım gerektiren meslekler ve sanat ile iç içedir. Geometrik şekillerin özelliklerini belirlemede uzunluk, alan, açı gibi kavramlar kullanılır. Bu ünitede öğreneceğimiz dörtgenlerin ve çokgenlerin uzunluk, açı ve alan özellikleri farklı alanlarda karşımıza çıkabilecek geometrik şekilleri algılamamıza yardımcı olacaktır.

PROJE



Projenin Adı: Origami Sanatı

Projenin Amacı: Kağıt katlama sanatı olan origami ile farklı figürler oluşturmak, bunu yaparken oluşan çokgenlerin kenar, köşegen ve açı özelliklerini incelemek.

Projenin İçeriği

1. Origami sanatının ortaya çıkışını ve özelliklerini araştırınız.
2. Origami sanatı ile oluşturulmuş farklı figürler bulunuz. Bu figürlerin nasıl oluşturulduğunu araştırınız. Figürlerin oluşturulmasında ne tür çokgenler oluştuğunu, bu çokgenlerin hangi özelliklerinin gözlemlendiğini inceleyiniz.
3. Origami sanatı ile kağıttan bir figür oluşturunuz.
4. Oluşturduğunuz figürde ne tür katlamalar yaptığınızı açıklayınız.
5. Katlamalar yaparken hangi çokgenlerin oluştuğunu bu çokgenlerin hangi özelliklerinin gözlemlendiğini açıklayınız.

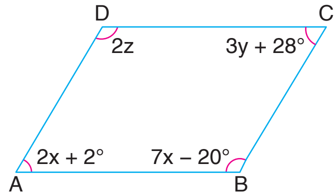
Projenin Sunumu

Araştırmalarınızın sonuçlarını ilgili resim ve canlandırmalarla zenginleştirip bir bilgisayar veya poster sunumu hazırlayabilirsiniz. Oluşturduğunuz figürü sınıf ortamında arkadaşlarınıza tanıtabilirsiniz.

ÖNCEKİ BİLGİLERİNİ TEST ET

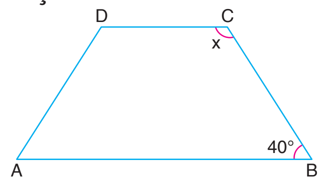
1. “1. Şekil”deki ABCD paralelkenarında verilenlere göre x, y ve z değerlerini bulunuz.

1. Şekil



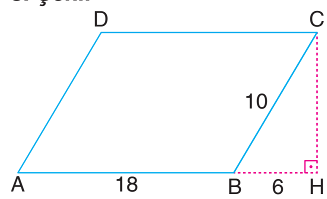
2. “2. Şekil”deki ABCD yamuğunda [AB] // [CD] dir. Verilenlere göre x kaç derecedir?

2. Şekil



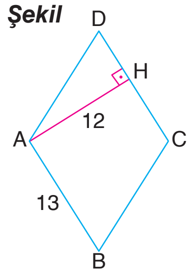
3. “3. Şekil”deki ABCD paralelkenarında verilenlere göre A(ABCD) kaç br^2 dir?

3. Şekil



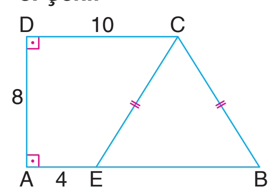
4. “4. Şekil”deki ABCD eşkenar dörtgeninde verilenlere göre A(ABCD) kaç br^2 dir?

4. Şekil



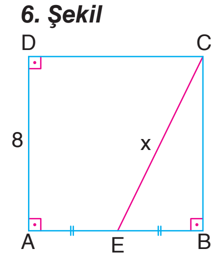
5. “5. Şekil”deki ABCD dik yamuğunda |CE| = |CB| dir. Verilenlere göre ABCD yamuğunun çevresinin kaç birim olduğunu bulunuz.

5. Şekil



6. “6. Şekil”de şekilde ABCD kare ve |AE| = |EB| dir. Buna göre |CE| = x uzunluğunu bulunuz.

6. Şekil



ÇOKGENLER

BÖLÜM 5.1

Çokgenler

Yandaki fotoğrafta yaklaşık 40 000 bazalt sütundan oluşmuş doğa harikası bir volkanik oluşum görülmektedir. Kuzey İrlanda'da bulunan bu sütunlar UNESCO tarafından Dünya mirasları arasına alınmıştır.

Fotoğrafı dikkatlice inceledikten sonra bu sütunların yüzeylerinin hangi geometrik şekillere model olduğunu açıklayınız.

TERİMLER

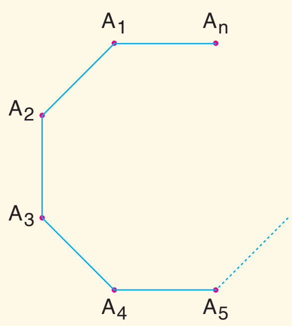
- Çokgen
- Düzgün çokgen
- İç açı
- Dış açı

Çokgen	$n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 3$ olmak üzere aynı düzlemde ardışık üç tanesi doğrusal olmayan $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ noktalarını $[A_1A_2], [A_2A_3], ..., [A_nA_1]$ şeklinde birleştiren doğru parçalarının birleşimine **çokgen** denir.

1. Örnek

"7. Şekil" de verilen çokgeni inceleyelim.

7. Şekil



- $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ noktalarına çokgenin **köşeleri** denir.
- $[A_1A_2], [A_2A_3], ..., [A_nA_1]$ çokgenin **kenarları**dır.
- Çokgende bir kenarın uç noktalarına **komşu köşeler**, kesişen iki kenara **komşu kenarlar** denir.
- Bir çokgenin komşu olmayan iki köşesini birleştiren doğru parçası çokgenin bir **köşegeni**dir.
- Çokgenler kenar sayısına göre adlandırılır.
    - Üç kenarı olan çokgene üçgen,
    - Dört kenarı olan çokgene dörtgen,
    - Beş kenarı olan çokgene beşgen,
    - n kenarı olan çokgene n-gen denir.

2. Örnek

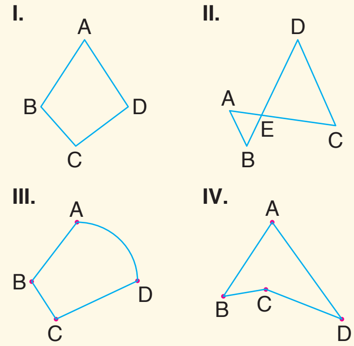
"8. Şekil" de verilen geometrik şekillerden çokgen olanları belirleyelim.

I ve **IV** numaralı şekiller doğru parçalarından oluşmuş, ayrıca bu doğru parçaları sadece uç noktalarında kesiştiğinden bu şekiller birer çokgendir.

II numaralı şekilde [AC] ve [BD] uç noktalarından farklı olarak E noktasında kesiştiğinden bu şekil çokgen değildir.

III numaralı şeklin tamamı doğru parçalarından oluşmadığından çokgen değildir.

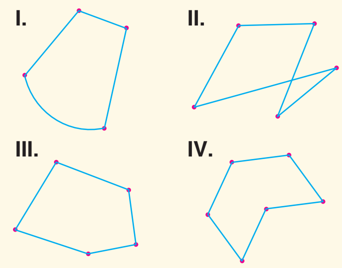
8. Şekil



Sıra Sizde

"9. Şekil" de verilen geometrik şekillerden hangilerinin çokgen olduğunu belirleyiniz.

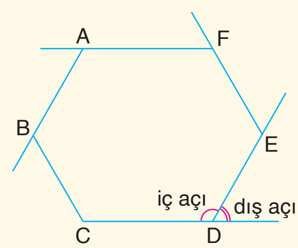
9. Şekil



Çokgenin Açıları

İç Açı Dış Açı	Bir çokgenin komşu kenarlarının oluşturduğu, çokgenin iç bölgesindeki açılara **iç açı**, aynı köşeden geçen iki kenardan birinin uzantısıyla diğerinin yaptığı açıya **dış açı** denir. n kenarlı bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı, $(n-2).180°$ dir. n kenarlı bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı $360°$ dir.

10. Şekil



3. Örnek

10 kenarlı bir çokgenin iç açılarının ölçülerinin toplamını bulalım.

Kenar sayısı $n = 10$ olduğundan çokgenin iç açılarının toplamı,

$(n-2).180° = (10-2).180° = 8.180° = 1440°$ bulunur.

Sıra Sizde

12 kenarlı bir çokgenin iç açılarının ölçülerinin toplamını bulunuz.

4. Örnek

"11. Şekil" deki ABCDE beşgeninde verilen açı ölçülerine göre x in kaç derece olduğunu bulalım.

$m(\widehat{CDE}) + 56° = 180° \Rightarrow m(\widehat{CDE}) = 124°$ olur.

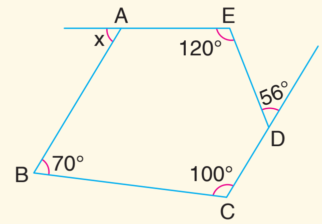
Verilen beşgenin iç açılarının ölçüleri toplamı,

$(5-2).180° = 540°$ dir.

$70° + 100° + 124° + 120° + m(\widehat{BAE}) = 540° \Rightarrow m(\widehat{BAE}) = 126°$ bulunur.

$x + 126° = 180° \Rightarrow x = 54°$ bulunur.

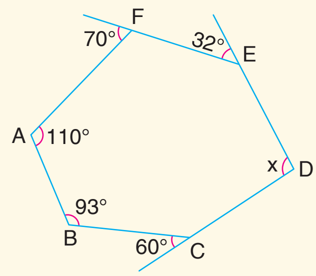
11. Şekil



Sıra Sizde

"12. Şekil" de verilen açı ölçülerine göre x in kaç derece olduğunu bulunuz.

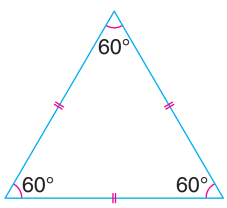
12. Şekil



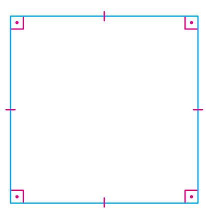
Düzgün Çokgen	Kenar uzunlukları ve iç açılarının (veya dış açılarının) ölçüleri eşit olan çokgenlere **düzgün çokgen** denir. n kenarlı bir düzgün çokgenin iç açılarının ölçüleri birbirine eşit ve dış açılarının ölçüleri de birbirine eşit olduğundan, • Bir iç açısının ölçüsü $\frac{(n-2).180°}{n}$ dir. • Bir dış açısının ölçüsü $\frac{360°}{n}$ dir.

5. Örnek

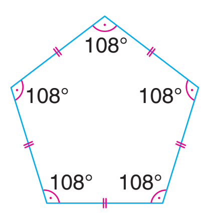
Aşağıda verilen düzgün çokgenleri inceleyelim.



Düzgün Üçgen
(Eşkenar üçgen)



Düzgün Dörtgen
(Kare)



Düzgün Beşgen

PROJE

203. sayfadaki projede "Projenin İçeriği" bölümündeki ilk adımı gerçekleştirebilirsiniz.

6. Örnek

Bir dış açısının ölçüsü 30° olan düzgün çokgenin kaç kenarlı olduğunu bulalım.

Düzgün çokgenin kenar sayısı n olsun. Düzgün çokgende bir dış açının ölçüsü $\frac{360°}{n}$ olduğundan,

$$\frac{360°}{n} = 30° \Rightarrow n = 12 \text{ bulunur.}$$

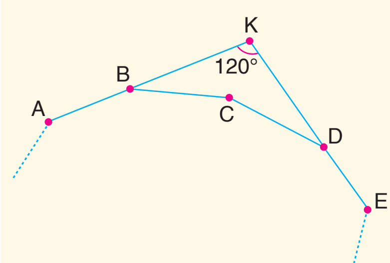
Sıra Sizde

Bir dış açısının ölçüsü 20° olan düzgün çokgenin kaç kenarlı olduğunu bulunuz.

7. Örnek

"13. Şekil" deki ABCDE... düzgün çokgeninde $m(\widehat{AKE}) = 120°$ olduğuna göre bu çokgenin bir iç açısının ölçüsünü bulalım.

13. Şekil

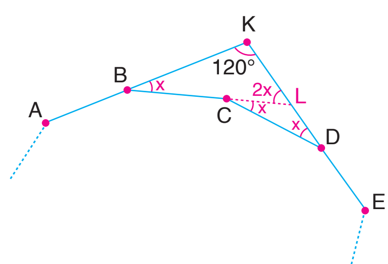


[BC] nı [KE] ile L noktasında kesişecek şekilde uzatalım. Düzgün çokgende dış açılar birbirine eşit olduğundan,

$m(\widehat{LBK}) = m(\widehat{DCL}) = m(\widehat{LDC}) = x$ olur.

BKL üçgeninde $m(\widehat{BLK}) = 2x$ olup iç açılar toplamından,

14. Şekil



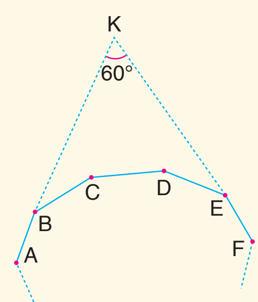
$x + 2x + 120° = 180° \Rightarrow x = 20°$ dir.

Çokgenin bir iç açısı $180° - 20° = 160°$ bulunur.

Sıra Sizde

"15. Şekil'de verilen ABCDEF... düzgün çokgeninde $m(\widehat{AKF}) = 60°$ ise çokgenin bir iç açısının ölçüsünü bulunuz.

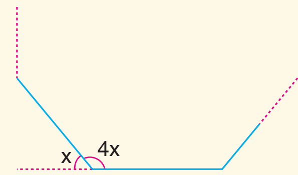
15. Şekil



8. Örnek

Bir düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsü bir dış açısının ölçüsünün 4 katıdır. Bu çokgenin kaç kenarlı olduğunu bulalım.

16. Şekil



Bir dış açısının ölçüsü x ise iç açısının ölçüsü $4x$ olur.

$$x + 4x = 180° \Rightarrow x = 36° \text{ dir.}$$

Bir dış açısının ölçüsü 36° ise çokgenin kenar sayısı,

$$\frac{360°}{n} = 36° \Rightarrow n = 10 \text{ bulunur.}$$

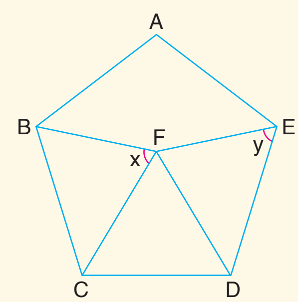
Sıra Sizde

n kenarlı bir düzgün çokgende bir iç açının ölçüsünün 2 katı, bir dış açının ölçüsünün 7 katına eşittir. Bu çokgenin kaç kenarlı olduğunu bulunuz.

9. Örnek

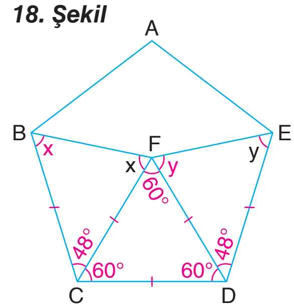
"17. Şekil" de ABCDE düzgün beşgen, CFD eşkenar üçgendir. Buna göre $x + y$ toplamını bulalım.

17. Şekil



CFD eşkenar üçgen ise BCF ve FDE ikizkenar üçgen olur.

18. Şekil



Düzgün beşgenin bir iç açısının ölçüsü;

$$\frac{(5-3).180°}{5} = 108° \text{ dir}$$

Bu durumda,

$$m(\widehat{BCF}) = m(\widehat{FDE}) = 108° - 60° = 48° \text{ dir.}$$

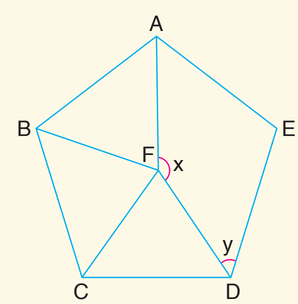
O hâlde $x = y = \dfrac{180° - 48°}{2} = 66°$ dir.

Buna göre $x + y = 66° + 66° = 132°$ bulunur.

Sıra Sizde

"19. Şekil" deki ABCDE düzgün beşgen, BFC eşkenar üçgendir. $x + y$ toplamının kaç derece olduğunu bulunuz.

19. Şekil



ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

a. ☐ Eşkenar dörtgen bir düzgün çokgendir.

b. ☐ Bir çokgende aynı köşeye ait iç ve dış açıların ölçülerinin toplamı 180° dir.

c. ☐ Bir çokgende ardışık iki köşeyi birleştiren doğru parçasına köşegen denir.

d. ☐ Bütün çokgenlerin dış açılarının ölçülerinin toplamı 360° dir.

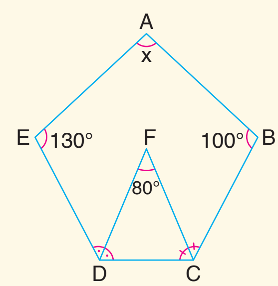
e. ☐ Çokgende iki kenarın birleşim noktası köşedir.

2. Bir çokgenin üç iç açısının ölçüleri 85°, 100° ve 115° dir. Bu çokgenin diğer iç açılarının ölçüleri birbirine eşit ve 150° ise bu çokgen kaç kenarlıdır?

3. Bir düzgün çokgenin bir dış açısı en fazla kaç derece olabilir?

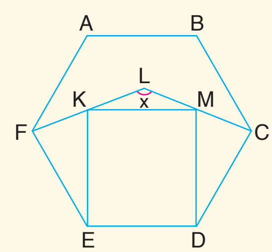
4. "20. Şekil"deki beşgende verilen değerlere göre x kaç derecedir?

20. Şekil



5. "21. Şekil"deki ABCDEF düzgün altıgen, KMDE karedir. Buna göre $m(\widehat{FLC}) = x$ kaç derecedir?

21. Şekil



6. Aşağıdakilerden hangisi bir düzgün çokgenin bir dış açısı <u>olamaz</u>?

A) 24° B) 30° C) 36° D) 44° E) 45°

DÖRTGENLER VE ÖZELLİKLERİ

BÖLÜM 5.2

Dörtgenlerin Kenar ve Açı Özellikleri

Doğada var olan geometrik şekillerin birçoğu mimaride kulllanılır. Bu geometrik şekillerden en çok dörtgenleri çevremizde görürüz. Bunun nedeni sizce ne olabilir?

Dörtgenler ve Temel Elemanları	• Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan A, B, C ve D noktalarını birleştiren [AB], [BC], [CD], [DA] ların birleşimine **dörtgen** denir. • Komşu köşeleri birleştiren doğru parçalarına **kenar**, karşılıklı köşeleri birleştiren doğru parçalarına da **köşegen** denir. • Her bir iç açısının ölçüsü 180° den küçük olan dörtgene (iç bölgesinde seçilen herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası dörtgenin iç bölgesinde kalıyorsa) **dışbükey (konveks) dörtgen**, herhangi bir iç açısının ölçüsü 180° den büyük olan dörtgene (iç bölgesinde seçilen iki noktayı birleştiren doğru parçası dörtgenin iç bölgesinde kalmıyorsa) **içbükey (konkav) dörtgen** denir. "22. Şekil" deki ABCD dışbükey, "23. Şekil" deki KLMN ise içbükey dörtgendir.

1. Örnek

Aşağıda dörtgenlerin bazı temel özellikleri verilmiştir. İnceleyelim.

- Dörtgende iç açıların ölçüleri toplamının 360° olduğunu gösterelim. "24. Şekil" deki ABCD dörtgenini ele alalım. [DB] nı çizelim.

  $a + b + c = 180°$ **(I)** ve $d + e + f = 180°$ **(II)** olur.

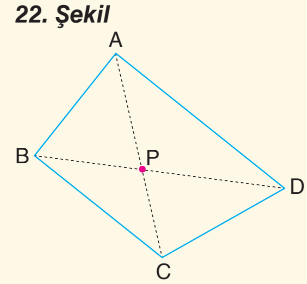
TERİMLER

- Dışbükey dörtgen
- İçbükey dörtgen
- Köşegen
- Çevre
- Alan

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

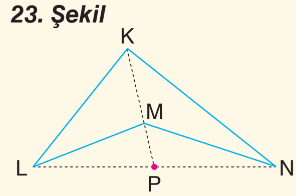
- Ç(ABCD)

22. Şekil



Dışbükey (Konveks) Dörtgen

23. Şekil

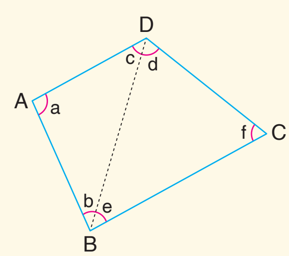


İçbükey (Konkav) Dörtgen

DİKKAT

Bundan sonra "dörtgen" ifadesi "dışbükey dörtgen" için kullanılacaktır.

24. Şekil



I ve II eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\underbrace{a}_{\downarrow} + \underbrace{b+e}_{\downarrow} + \underbrace{f}_{\downarrow} + \underbrace{d+c}_{\downarrow} = 360°$$

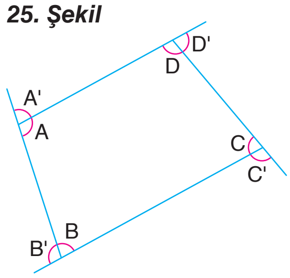
$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360°$ bulunur.

- Dörtgende dış açıların ölçüleri toplamının 360° olduğunu gösterelim.

Aynı köşeye ait iç ve dış açılar bütünler açılardır.

Buna göre;

25. Şekil



$$\begin{array}{rl} & A + A' = 180° \\ & B + B' = 180° \\ & C + C' = 180° \\ + & D + D' = 180° \\ \hline & \underbrace{A + B + C + D}_{\text{İç açıların ölçüleri toplamı } 360°} + \underbrace{A' + B' + C' + D'}_{\text{Dış açıların ölçüleri toplamı}} = 720° \end{array}$$

$A' + B' + C' + D' = 360°$ elde edilir.

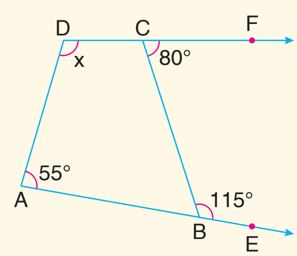
PROJE

203. sayfadaki projede "Projenin İçeriği" bölümündeki ikinci adımı gerçekleştirebilirsiniz.

2. Örnek

"26. Şekil"de ABCD dörtgen, $m(\widehat{BCF}) = 80°$, $m(\widehat{DAE}) = 55°$, $m(\widehat{CBE}) = 115°$, $m(\widehat{ADF}) = x$ olarak veriliyor. Buna göre x in kaç derece olduğunu bulalım.

26. Şekil



$m(\widehat{BCD}) = 180° - m(\widehat{BCF})$
$= 180° - 80°$
$= 100°$ dir.

$m(\widehat{ABC}) = 180° - m(\widehat{CBE})$
$= 180° - 115°$
$= 65°$ dir.

Dörtgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 360° olduğundan,

$m(\widehat{DAE}) + m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{CDA}) = 360°$

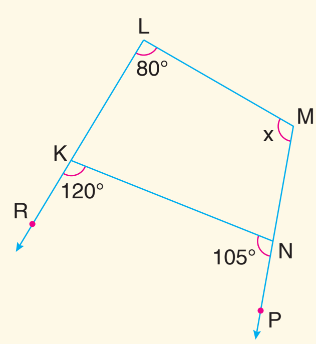
$55° + 65° + 100° + x = 360°$

$x = 140°$ bulunur.

Sıra Sizde

"27. Şekil"de KLMN dörtgen, $m(\widehat{RKN}) = 120°$, $m(\widehat{KNP}) = 105°$, $m(\widehat{RLM}) = 80°$, $m(\widehat{LMP}) = x$ olarak veriliyor. Buna göre x in kaç derece olduğunu bulunuz.

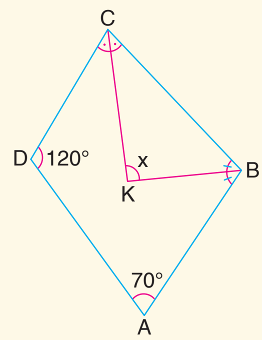
27. Şekil



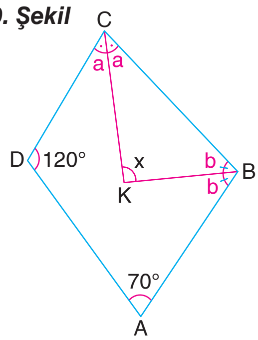
3. Örnek

"28. Şekil" deki ABCD dörtgeninde [CK] ve [BK] açıortaylardır. $m(\widehat{CDA}) = 120°$, $m(\widehat{DAB}) = 70°$, $m(\widehat{BKC}) = x$ ise x in kaç derece olduğunu bulalım.

28. Şekil



29. Şekil



ABCD dörtgeninde verilenlere göre,

$$120° + 70° + 2a + 2b = 360°$$

$$2(a + b) = 170°$$

$$a + b = 85° \text{ olur.}$$

CKB üçgeninde,

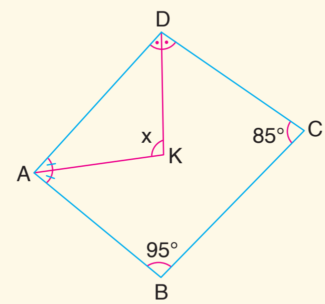
$$a + b + x = 180° \Rightarrow 85 + x = 180°$$

$$\Rightarrow x = 95° \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

"30. Şekil" deki ABCD dörtgeninde [AK] ve [DK] açıortay, $m(\widehat{B}) = 95°$, $m(\widehat{C}) = 85$, $m(\widehat{AKD}) = x$ ise x in kaç derece olduğunu bulunuz.

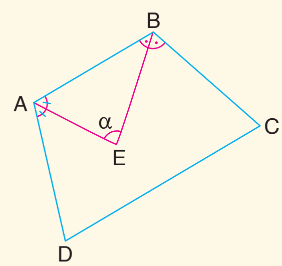
30. Şekil



Bir ABCD dörtgeninde komşu iki iç açının açıortaylarının oluşturduğu açının ölçüsü, diğer iki açının ölçüleri toplamının yarısına eşittir.

$$\alpha = \frac{m(\widehat{D}) + m(\widehat{C})}{2}$$

31. Şekil



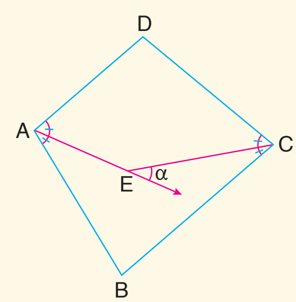
DÜŞÜNCE KUTUSU

"32. Şekil" deki gibi bir ABCD dörtgeninde karşılıklı iki iç açının açıortaylarının oluşturduğu dar açının ölçüsünün, diğer iki iç açının ölçüleri farkının mutlak değerinin yarısına eşit olduğunu gösteriniz.

$$\alpha = \frac{\left| m(\widehat{B}) - m(\widehat{D}) \right|}{2}$$

İpucu: ABCD ve ADCE dörtgenlerinin iç açılarının ölçüleri toplamını kullanınız.

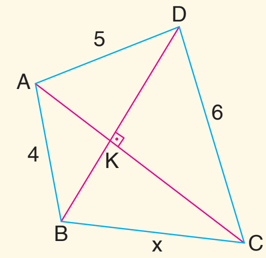
32. Şekil



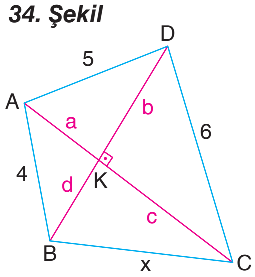
4. Örnek

"33. Şekil" de ABCD dörtgen, $[AC] \perp [BD]$, $|AD| = 5$ br, $|DC| = 6$ br, $|AB| = 4$ br ve $|BC| = x$ olduğuna göre x değerini bulalım.

33. Şekil



34. Şekil



$\overset{\frown}{ADK}$ ve $\overset{\frown}{BKC}$ nde Pisagor teoremini uygulayalım. Elde ettiğimiz eşitlikleri taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 5^2 \\ + \; d^2 + c^2 = x^2 \\ \hline a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 5^2 + x^2 \text{ ... (I) olur.} \end{array}$$

$\overset{\frown}{DKC}$ ve $\overset{\frown}{AKB}$ nde Pisagor teoremini uygulayalım. Elde ettiğimiz eşitlikleri taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{l} b^2 + c^2 = 6^2 \\ + \; a^2 + d^2 = 4^2 \\ \hline a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 6^2 + 4^2 \text{ ... (II) elde edilir.} \end{array}$$

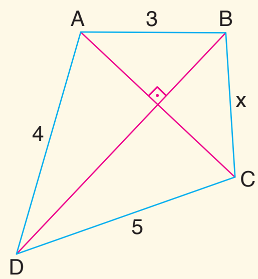
I ve **II** eşitliklerinden $5^2 + x^2 = 6^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 27$

$\Rightarrow x = 3\sqrt{3}$ br bulunur.

Sıra Sizde

"35. Şekil" de verilen ABCD dörtgeninde $[AC] \perp [BD]$, $|AB| = 3$ br, $|AD| = 4$ br ve $|DC| = 5$ br ise $|BC| = x$ in kaç birim olduğunu bulunuz.

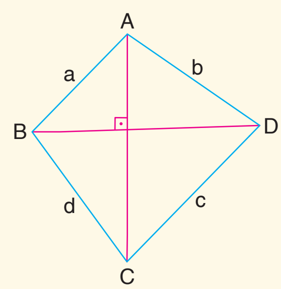
35. Şekil



"36. Şekil" deki gibi köşegenleri birbirine dik olan bir ABCD dörtgeninde karşılıklı kenar uzunluklarının kareleri toplamı, diğer kenar uzunluklarının karelerinin toplamına eşittir.

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

36. Şekil



DÜŞÜNCE KUTUSU

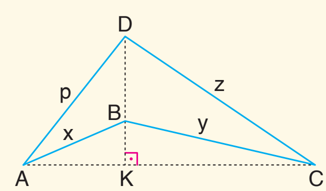
"37. Şekil" deki ABCD içbükey dörtgeninde,

$[DK] \perp [AC]$, $|AB| = x$, $|BC| = y$,

$|DC| = z$, $|AD| = p$ ise $x^2 + z^2 = y^2 + p^2$ olduğunu gösteriniz.

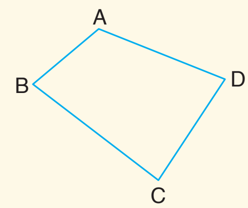
İpucu: BAC üçgeninin [AC] kenarına göre simetriğini çiziniz.

37. Şekil



Dörtgenin Çevresi	Bir ABCD dörtgeninin çevresi, dört kenar uzunluğunun toplamına eşittir. $Ç(ABCD) = |AB| + |BC| + |CD| + |DA|$

38. Şekil



5. Örnek

Arkeoloji, arkeolojik yöntemlerle ortaya çıkarılmış kültürleri, sosyolojik, coğrafik ve tarihsel bakımdan inceleyen bir bilim dalıdır. Yunanca kelime anlamı eskinin bilgisini tanımlama ve ortaya çıkarma olarak düşünülebilir.

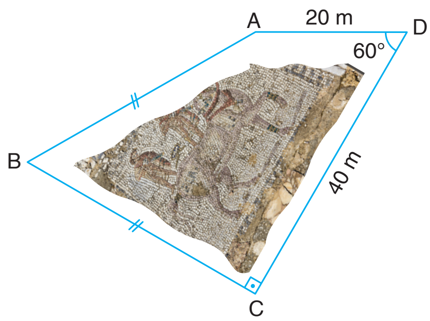
Tarihi ve doğal miraslar bakımından çok zengin bir coğrafyaya kurulu olan vatanımızda tarihi eserleri korumak bir vatandaşlık görevimizdir.

Gaziantep ilimizde bulunan dünyaca ünlü Zeugma Antik Kenti'nde 1987 yılında başlayan kazılar 13 yıl boyunca büyük bir sorumlulukla yapılıp tamamlanmıştır.

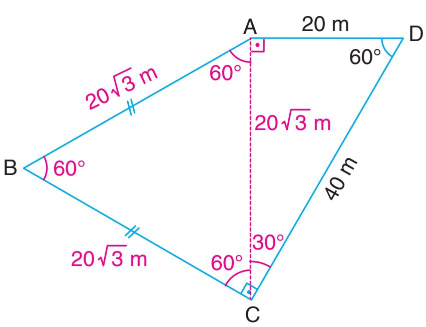
"39. Şekil"de bir buluntu üzerinde çalışma yapılırken etrafına çekilen ABCD dörtgeni şeklindeki güvenlik şeridi görülmektedir.

$m(\widehat{ADC}) = 60°$, $[DC] \perp [BC]$, $|AB| = |BC|$, $|AD| = 20$ m ve $|CD| = 40$ m olduğuna göre $Ç(ABCD)$ yi bulalım.

39. Şekil



40. Şekil



$[AC]$ çizelim. $|DC| = 2|AD|$ ve $m(\widehat{ADC}) = 60°$ olduğundan ADC $30° - 60° - 90°$ üçgeni olup

$m(\widehat{DAC}) = 90°$ ve

$m(\widehat{DCA}) = 30°$ dir.

$30° - 60° - 90°$ üçgeninden

$|AC| = 20\sqrt{3}$ m bulunur.

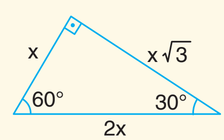
Bu durumda $m(\widehat{ACB}) = 60°$ ve $|AB| = |BC|$ olduğuna göre

ABC üçgeni eşkenardır. O hâlde $|AB| = |BC| = 20\sqrt{3}$ m olup

$Ç(ABCD) = 20 + 40 + 20\sqrt{3} + 20\sqrt{3} = (60 + 40\sqrt{3})$ m bulunur.

HATIRLAYALIM

$30° - 60° - 90°$ üçgeninde kenar uzunlukları arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

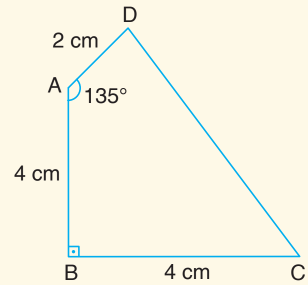


Sıra Sizde

"41. Şekil" deki ABCD dörtgeninde $[AB] \perp [BC]$, $m(\widehat{BAD}) = 135°$, $|AB| = |BC| = 2|AD| = 4$ cm dir.

Buna göre Ç(ABCD) nin kaç cm olduğunu bulunuz.

41. Şekil



6. Örnek

Bir dörtgenin kenar uzunlukları 2, 3, 5 ve 7 ile orantılıdır. Dörtgenin çevre uzunluğu 85 cm olduğuna göre en uzun kenarının kaç cm olduğunu bulalım.

"42. Şekil" de gösterilen kenar uzunlukları 2k, 3k, 5k ve 7k dır. Bu durumda çevre,

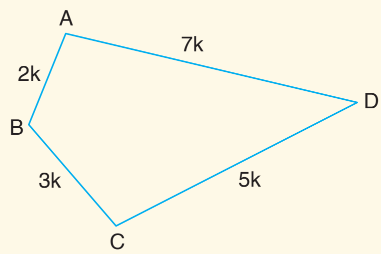
$Ç(ABCD) = 85 \Rightarrow 2k + 3k + 5k + 7k = 85$

$\Rightarrow 17k = 85$

$\Rightarrow k = 5$ tir.

O hâlde en uzun kenar $7k = 7 \,.\, 5 = 35$ cm bulunur.

42. Şekil



Sıra Sizde

Bir dörtgenin kenar uzunlukları ilk dört asal sayı ile orantılıdır. Bu dörtgenin en uzun kenarı 56 cm olduğuna göre çevre uzunluğunu bulunuz.

7. Örnek

"43. Şekil" deki ABCD dörtgeninde K, L, M ve N bulundukları kenarların orta noktalarıdır. $|BD| = 10$ br ve $|LM| = 6$ br olduğuna göre Ç(KLMN) yi bulalım.

[AC] nı çizelim.

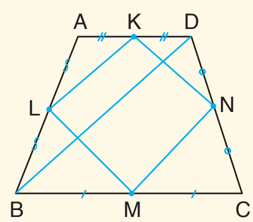
ABC üçgeninde L ve M orta noktalar olduğundan [LM] orta tabandır ve [AC] nın yarısıdır. Bu durumda $|AC| = 12$ br dir.

ACD üçgeninde K ve N orta noktalar olduğundan [KN] orta tabandır ve [AC] nın yarısıdır. Bu durumda $|KN| = 6$ br dir.

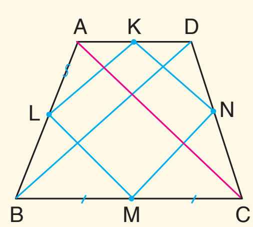
Benzer şekilde ABD ve BCD üçgenlerinde sırasıyla [LK] ve [MN] orta tabanlar olup uzunlukları da $|BD| = 10$ br in yarısı, 5 er br dir. O hâlde

$Ç(KLMN) = 5 + 6 + 5 + 6 = 22$ br bulunur

43. Şekil



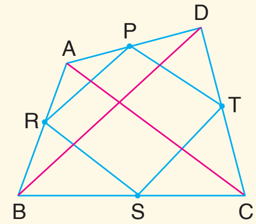
44. Şekil



Sıra Sizde

"45. Şekil"de verilen ABCD dörtgeninde P, R, S ve T bulundukları kenarların orta noktalarıdır. $|AC| = 24$ cm ve $|BD| = 36$ cm olduğuna göre Ç(PRST) kaç cm dir?

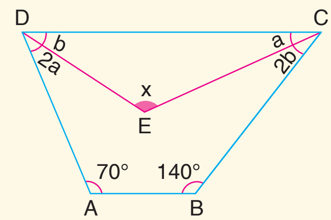
45. Şekil



ALIŞTIRMALAR

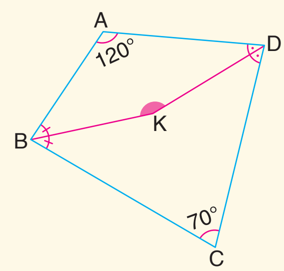
1. "46. Şekil"deki ABCD dörtgeninde verilenlere göre x kaç derecedir?

46. Şekil



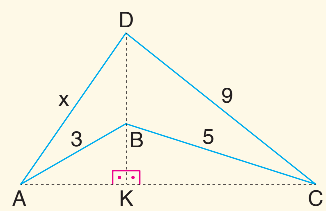
2. "47. Şekil"deki ABCD dörtgeninde [BK] ve [DK] açıortay, $m(\widehat{A}) = 120°$ ve $m(\widehat{C}) = 70°$ ise $m(\widehat{BKD})$ = kaç derecedir?

47. Şekil



3. "48. Şekil"deki ABCD içbükey dörtgeninde $[DK] \perp [AC]$ dir. Verilenlere göre x kaç br dir?

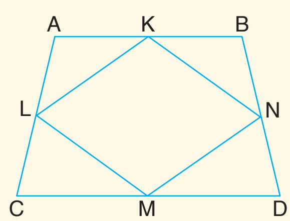
48. Şekil



4. Bir dörtgenin kenar uzunlukları 1, 2, 4 ve 6 ile ters orantılıdır. Dörtgenin çevre uzunluğu 46 br ise en kısa kenar uzunluğu kaç br dir?

5. "49. Şekil"deki K, L, M ve N noktaları bulundukları kenarların orta noktaları ve Ç(KLMN) = 38 br^2 dir. Buna göre $|AD| + |BC|$ kaç br dir?

49. Şekil



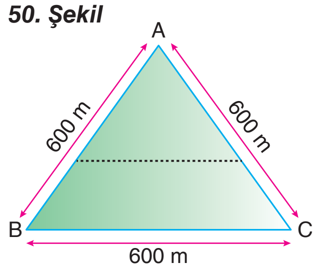
BÖLÜM 5.3

ÖZEL DÖRTGENLER

Yamuk

Üçgen şeklindeki bir arazi bir kenarına paralel bir çit ile bölünerek iki kişi arasında eşit olarak paylaştırılacaktır. Bu şekilde bir paylaşım yapıldığında elde edilecek arazilerin alanlarının eşit olduğu nasıl anlaşılabilir?

50. Şekil



TERİMLER

- Yamuk
- İkizkenar yamuk
- Dik yamuk
- Paralelkenar
- Eşkenar dörtgen
- Dikdörtgen
- Kare
- Deltoid

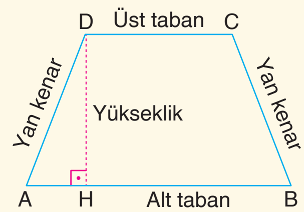
Yamuk ve Özellikleri

En az iki kenarı parelel olan dörtgen **yamuk** olarak adlandırılır.

- Yamukta tabanlar birbirine paraleldir. ABCD yamuğunda [AB] // [CD] dir.
- Bir yamukta tabanlardan birine ait bir noktadan, diğer tabana inilen dikme yamuğun yüksekliğidir. [DH] ABCD yamuğunun yüksekliğidir.
- Bir yamukta bir yan kenar ile tabanların oluşturduğu iç açıların toplamı 180° dir. "51. Şekil" deki ABCD yamuğunda,

$$m(\widehat{A})+m(\widehat{D})=180° \text{ ve } m(\widehat{B})+m(\widehat{C})=180° \text{ dir.}$$

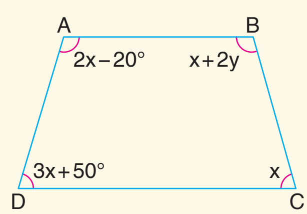
51. Şekil



1. Örnek

"52. Şekil" de ABCD yamuk, [CD] // [AB] dir. Verilenlere göre x ve y nin kaç derece olduğunu bulalım.

52. Şekil



$m(\widehat{A})+m(\widehat{D})=180°$ olduğundan,

$2x - 20° + 3x + 50° = 180° \Rightarrow 5x + 30° = 180°$

$\Rightarrow 5x = 150°$

$\Rightarrow x = 30°$ olur.

$m(\widehat{B})+m(\widehat{C})=180°$ olduğundan,

$x + 2y + x = 180° \Rightarrow 2x + 2y = 180°$

$\Rightarrow 2.30° + 2y = 180°$

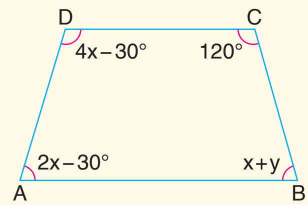
$\Rightarrow 2y = 120°$

$\Rightarrow y = 60°$ bulunur.

Sıra Sizde

"53. Şekil"de ABCD yamuk, $[AB] // [DC]$ dir. Verilenlere göre x ve y nin kaç derece olduğunu bulunuz.

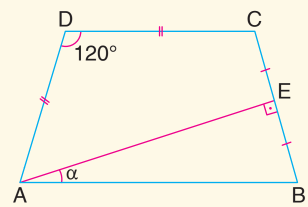
53. Şekil



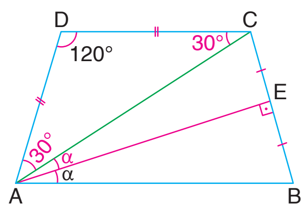
2. Örnek

"54. Şekil"de ABCD yamuk, $[AB] // [CD]$ dir. $|AD| = |DC|$, $[AE] \perp [CB]$, $|CE| = |EB|$ ve $m(\widehat{ADC}) = 120°$ olduğuna göre, $m(\widehat{EAB}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulalım.

54. Şekil



55. Şekil



$[AC]$ köşegenini çizelim. $\widehat{ADC}$ ikizkenar üçgen olduğundan,

$m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{ACD}) = 30°$ olur.

$\widehat{CAB}$ nde $[AE]$ hem kenarortay hem yükseklik olduğundan $\widehat{CAB}$ ikizkenardır.

Bu durumda $m(\widehat{EAC}) = \alpha$ olur. O hâlde,

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180° \Rightarrow 120° + 30° + 2\alpha = 180°$

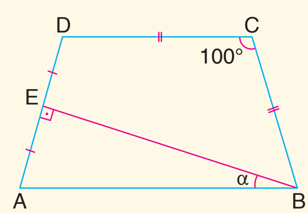
$\Rightarrow 2\alpha = 30°$

$\Rightarrow \alpha = 15°$ bulunur.

Sıra Sizde

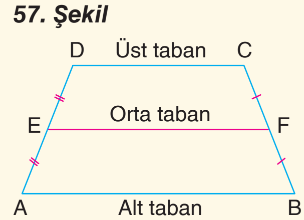
"56. Şekil"de verilen ABCD yamuğunda $[AB] // [CD]$, $|AE| = |ED|$, $|DC| = |CB|$, $[BE] \perp [AD]$, $m(\widehat{BCD}) = 100°$ dir. $m(\widehat{ABE}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

56. Şekil



Orta Taban	Bir yamukta paralel olmayan kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçasına **orta taban** denir.

57. Şekil

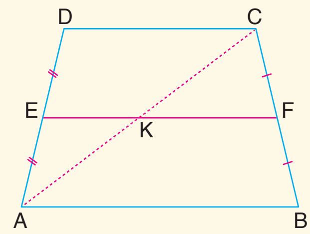


ETKİNLİK

- "58. Şekil"de verilen ABCD yamuğunda $[AB] // [DC]$ ve $[EF]$ orta tabandır.
- $[DC] // [EF] // [AB]$ olduğunu gösteriniz.
- $[AC]$ köşegeninin çizilmesiyle elde edilen üçgenlerden $\widehat{EAK}$ ile $\widehat{DAC}$, $\widehat{KCF}$ ile $\widehat{ACB}$ üçgenleri arasındaki ilişkiyi bulunuz.

➢ Elde ettiğiniz sonuçtan yararlanarak orta taban uzunluğunu alt ve üst taban uzunluklarından yararlanarak yazınız.

58. Şekil



3. Örnek

"59. Şekil"deki ABCD yamuğunda $[AB] // [CD]$ ve $[EF]$ orta tabandır. $|AB| = 3|DC|$, $|EF| = 12$ br olduğuna göre $|AB|$ nu bulalım.

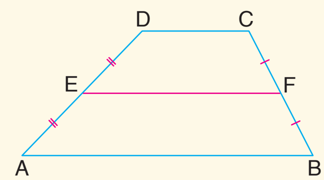
$|DC| = a$ br ise $|AB| = 3a$ br olur. $[CB]$ na paralel olacak şekilde $[DK]$ nı çizelim. $|DC| = |LF| = |KB| = a$ br olur. $\widehat{DEL} \sim \widehat{DAK}$ ve $\dfrac{|DE|}{|DA|} = \dfrac{1}{2}$ olduğundan $|EL| = a$ br dir.

Bu durumda $|EF| = a + a = 2a$ br olur.

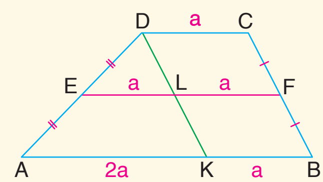
$|EF| = 2a = 12$ br $\Rightarrow a = 6$ br

$\Rightarrow |AB| = 3a = 18$ br bulunur.

59. Şekil



60. Şekil

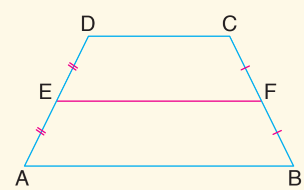


Sıra Sizde

Bir yamukta orta taban uzunluğu 18 cm dir. Yamuğun tabanlarından birinin uzunluğu 12 cm olduğuna göre diğer taban uzunluğunu bulunuz.

Yamukta Orta Taban Uzunluğu	Bir ABCD yamuğunda orta taban uzunluğu alt ve üst tabanların uzunlukları toplamının yarısıdır. $|EF| = \dfrac{|AB| + |DC|}{2}$

61. Şekil



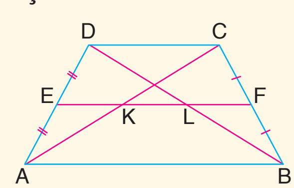
DÜŞÜNCE KUTUSU

"62. Şekil"de $[AB] // [DC]$ ve $[EF]$ orta tabandır. Bu durumda,

$|KL| = \dfrac{||AB| - |DC||}{2}$ olduğunu gösteriniz.

İpucu: $\widehat{AEK}$ ile $\widehat{ADC}$ nin ve $\widehat{BLF}$ ile $\widehat{BDC}$ nin benzerliğini kullanınız.

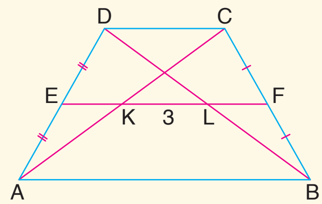
62. Şekil



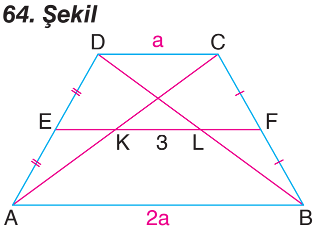
4. Örnek

"63. Şekil" deki ABCD yamuğunda [AB] // [DC], [EF] orta taban, |KL| = 3 br ve |AB| = 2|DC| dir. Buna göre |EF| nu bulalım.

63. Şekil



64. Şekil



|DC| = a br ise |AB| = 2a br olur.

$$|KL| = \frac{||AB| - |DC||}{2} \Rightarrow 3 = \frac{2a - a}{2}$$

$\Rightarrow$ a = 6 br olur.

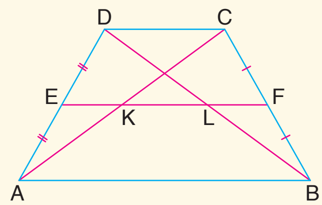
$$|EF| = \frac{|AB| + |DC|}{2} = \frac{2a + a}{2} = \frac{3.6}{2}$$

= 9 br bulunur.

Sıra Sizde

"65. Şekil" de verilen ABCD yamuğunda [AB] // [DC], 5|DC| = 3|AB|, [EF] orta taban ve |EF| = 8 br dir. Buna göre |KL| nu bulunuz.

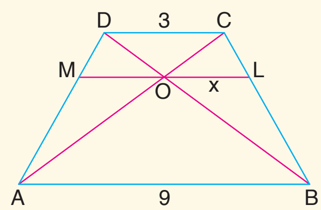
65. Şekil



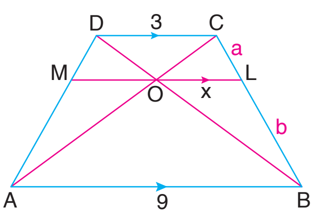
5. Örnek

"66. Şekil" de verilen ABCD yamuğunda [AB] // [DC] // [ML], [AC] ∩ [DB] = {O}, |DC| = 3 br, |AB| = 9 br dir. Verilenlere göre |OL| = x değerini bulalım.

66. Şekil



67. Şekil



|CL| = a br ve |LB| = b br olsun.

$\overset{\frown}{LBO} \sim \overset{\frown}{CBD}$ olduğundan $\frac{x}{3} = \frac{b}{a+b}$ ... **(I)** olur.

$\overset{\frown}{OCL} \sim \overset{\frown}{ACB}$ olduğundan $\frac{x}{9} = \frac{a}{a+b}$ ... **(II)** olur.

I ve **II** numaralı eşitlikleri taraf tarafa toplayalım. Bu durumda,

$$\underset{(3)}{\frac{x}{3}} + \frac{x}{9} = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}$$

$$\frac{4x}{9} = \frac{a+b}{a+b}$$

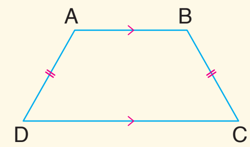
$$\frac{4x}{9} = 1$$

$$x = \frac{9}{4} \text{ br bulunur.}$$

Sıra Sizde

“66. Şekil”deki ABCD yamuğunda $|DC| = 6$ br, $|AB| = 18$ br olduğunu kabul ederek $|OL| = x$ değerini bulunuz.

İkizkenar Yamuk	Paralel olmayan kenarlarının uzunlukları eşit olan yamuğa **ikizkenar yamuk** denir.



68. Şekil

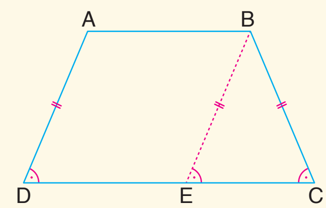
6. Örnek

İkizkenar yamuğun özelliklerini inceleyelim.

a. İkizkenar yamukta taban açılarının ölçüleri eşittir.

“69. Şekil”deki ABCD yamuğunda $[BE] // [AD]$ olacak biçimde $[BE]$ nı çizelim.

ABED paralelkenar olduğundan $|AD| = |BE|$ ve $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{BEC})$ olur. $\widehat{BEC}$ nde $|BE| = |BC|$ olduğundan $\widehat{BEC}$ ikizkenar ve $m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{BCE})$ olur. Dolayısıyla $m(\widehat{D}) = m(\widehat{C})$ bulunur.

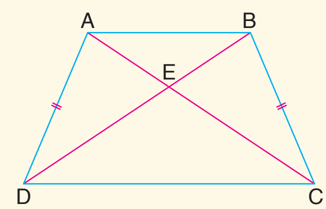


69. Şekil

b. İkizkenar yamukta köşegen uzunlukları birbirine eşittir.

$$\left.\begin{array}{l} |AD| = |BC| \\ |DC| = |CD| \\ m(\widehat{D}) = m(\widehat{C}) \end{array}\right\} \widehat{ADC} \cong \widehat{BCD} \text{ olur.}$$

Eş üçgenlerin karşılıklı kenarları eşit uzunlukta olduğundan $|AC| = |BD|$ olur.



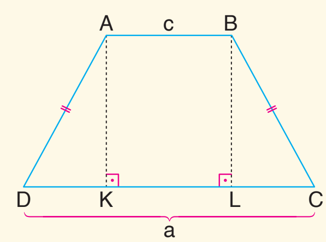
70. Şekil

c. “71. Şekil”deki ABCD ikizkenar yamuğunda $|DK| = |LC| = \dfrac{a-c}{2}$ dir.

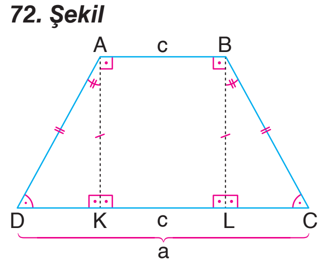
$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{DAK}) = m(\widehat{LBC}) \\ m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{BCD}) \\ |AD| = |BC| \end{array}\right\} \widehat{ADK} \cong \widehat{BCL} \text{ olur.}$$

O hâlde $|DK| = |LC|$ dir.

Bu durumda $|DK| = |LC| = \dfrac{a-c}{2}$ olur.



71. Şekil

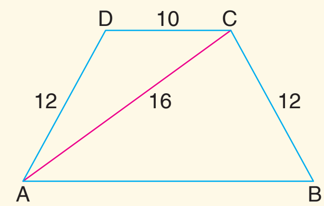


72. Şekil

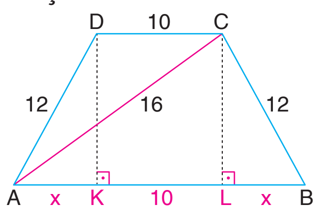
7. Örnek

“73. Şekil” deki ABCD yamuğunda $[AB] // [DC]$, $|AD| = |BC| = 12$ cm, $|AC| = 16$ cm, $|DC| = 10$ cm olduğuna göre $|AB|$ nu bulalım.

73. Şekil



74. Şekil



$[DK] \perp [AB]$ ve $[CL] \perp [AB]$ olacak şekilde $[DK]$ ve $[CL]$ larını çizelim.

Bu durumda,

$|DK| = |CL|$ ve $|AK| = |LB|$ olur.

$|AK| = |LB| = x$ olsun.

Sırasıyla $\overset{\frown}{DAK}$ ve $\overset{\frown}{ACL}$ dik üçgenlerinde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$$\left.\begin{array}{l} |DK|^2 = 144 - x^2 \\ |CL|^2 = 256 - (x+10)^2 \end{array}\right\} \text{ ve } |DK| = |CL| \text{ olduğundan,}$$

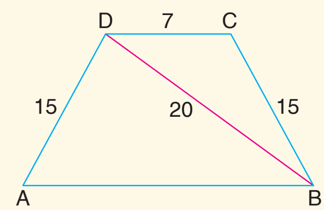
$144 - x^2 = 256 - x^2 - 20x - 100 \Rightarrow 20x = 12 \Rightarrow x = \dfrac{3}{5}$ cm dir. O hâlde,

$|AB| = 2x + 10$ olduğundan $|AB| = 2 . \dfrac{3}{5} + 10 = \dfrac{56}{5}$ cm bulunur.

Sıra Sizde

“75. Şekil” deki ABCD ikizkenar yamuğunda $[AB] // [DC]$, $|AD| = |BC| = 15$ cm, $|DC| = 7$ cm ve $|DB| = 20$ cm ise $|AB|$ nu bulunuz.

75. Şekil

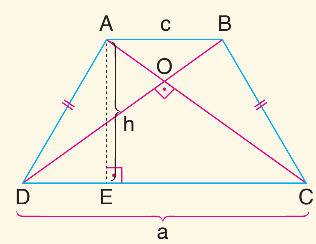


DÜŞÜNCE KUTUSU

“76. Şekil” deki gibi ABCD ikizkenar yamuğunda $[AC] \perp [BD]$ olduğunda $h = \dfrac{a+c}{2}$ olduğunu gösteriniz.

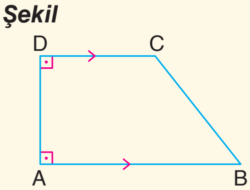
İpucu: ABCD yamuğunun O noktasından geçen yüksekliğini çiziniz.

76. Şekil



Dik Yamuk	Paralel olmayan kenarlarından biri tabanlara dik olan yamuğa **dik yamuk** denir.

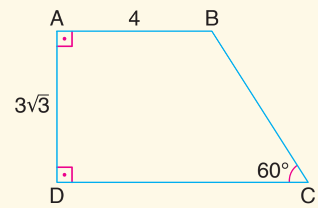
77. Şekil



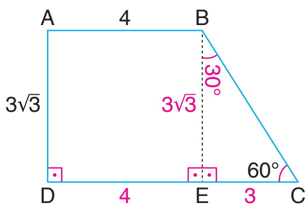
8. Örnek

"78. Şekil" deki ABCD dik yamuğunda $[AB] // [DC]$, $[AD] \perp [DC]$, $m(\widehat{BCD}) = 60°$, $|AB| = 4$ br ve $|AD| = 3\sqrt{3}$ br dir. Verilenlere göre $|DC|$ nu bulalım.

78. Şekil



79. Şekil



$[BE] \perp [DC]$ olacak şekilde $[BE]$ çizelim. ABED dikdörtgen olduğundan,

$|DE| = 4$ br ve $|BE| = 3\sqrt{3}$ br olur.

$\widehat{BEC}$ nde $m(\widehat{EBC}) = 30°$ olduğundan (30° - 60° - 90° üçgeni),

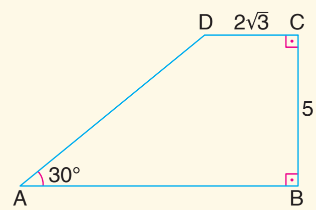
$|BE| = \sqrt{3}\,.|EC| \Rightarrow |EC| = 3$ br olur.

O hâlde $|DC| = |DE| + |EC| = 4 + 3 = 7$ br bulunur.

Sıra Sizde

"80. Şekil" deki ABCD dik yamuğunda $[CB] \perp [AB]$, $|DC| = 2\sqrt{3}$ br, $|CB| = 5$ br ve $m(\widehat{DAB}) = 30°$ dir. Verilenlere göre $|AB|$ nu kaç br dir?

80. Şekil

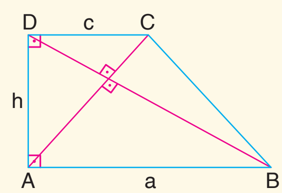


DÜŞÜNCE KUTUSU

"81. Şekil" de $[AB] // [DC]$, $[AC] \perp [BD]$, $[AD] \perp [AB]$, $|AD| = h$, $|DC| = c$, $|AB| = a$ ise $h^2 = a.c$ olduğunu gösteriniz.

İpucu: $\widehat{ADC}$ ve $\widehat{BAD}$ lerinin benzer olduğunu gösteriniz.

81. Şekil



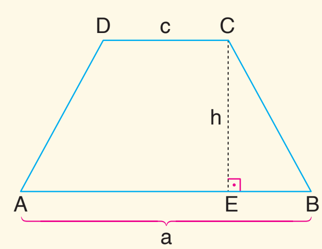
Yamuğun Alanı

ETKİNLİK

- "82. Şekil" de verilen ABCD yamuğunda $[AB] // [DC]$ ve $[CE] \perp [AB]$ dir. $|AB| = a$, $|DC| = c$ ve $|CE| = h$ olsun.
- Verilen ABCD yamuğunun herhangi bir köşegeninden yararlanarak yamuğu iki üçgene ayırınız.
- Oluşan üçgenlerin alanlarını yazınız.

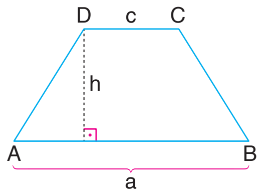
➢ Üçgenlerin alanlarından yararlanarak ABCD yamuğunun alan bağıntısını oluşturunuz.

82. Şekil



Yamuğun Alanı	Bir yamuğun alanı, taban uzunluklarının toplamı ile tabanlara ait yüksekliğin çarpımının yarısına eşittir. $A(ABCD) = \dfrac{(a+c).h}{2}$

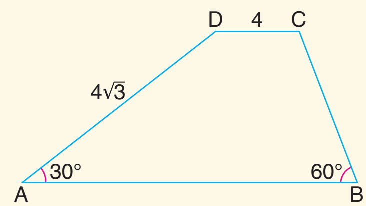
83. Şekil



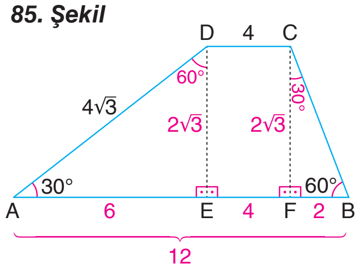
9. Örnek

"84. Şekil"deki ABCD yamuğunda $[AB] // [DC]$, $|DC| = 4$ br, $|AD| = 4\sqrt{3}$ br, $m(\widehat{DAB}) = 30°$ ve $m(\widehat{CBA}) = 60°$ dir. Buna göre ABCD yamuğunun alanını bulalım.

84. Şekil



85. Şekil



"85. Şekil"de $[DE] \perp [AB]$ ve $[CF] \perp [AB]$ olacak biçimde $[DE]$ ve $[CF]$ larını çizelim.

$\widehat{DEA}$ ve $\widehat{CFB}$ leri $30° - 60° - 90°$ üçgeni olduklarından,

$|DE| = 2\sqrt{3}$ br, $|AE| = 6$ br ve

$|CF| = 2\sqrt{3}$ br, $|FB| = 2$ br olur.

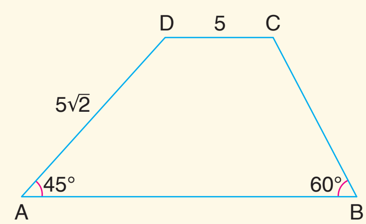
DCFE dikdörtgen olduğundan $|DC| = |EF| = 4$ br dir. O hâlde,

$$A(ABCD) = \frac{(12+4).2\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}\ br^2 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

"86. Şekil"deki ABCD yamuğunda $[AB] // [DC]$, $|DA| = 5\sqrt{2}$ br, $|DC| = 5$ br, $m(\widehat{DAB}) = 45°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 60°$ dir. Buna göre A(ABCD) nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.

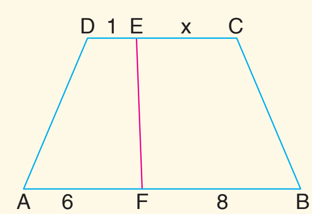
86. Şekil



10. Örnek

"87. Şekil"deki ABCD yamuğunda $[AB] // [DC]$, $|DE| = 1$ br, $|AF| = 6$ br, $|FB| = 8$ br ve $4.A(AFED) = 2.A(FBCE)$ dir. Buna göre $|EC| = x$ değerini bulalım.

87. Şekil



$[CH] \perp [AB]$ olacak biçimde $[CH]$ nı çizelim.

$$A(AFED) = \frac{(6+1).h}{2} = \frac{7.h}{2} \text{ br}^2 \text{ ve } A(FBCE) = \frac{(8+x).h}{2} \text{ br}^2 \text{ olur.}$$

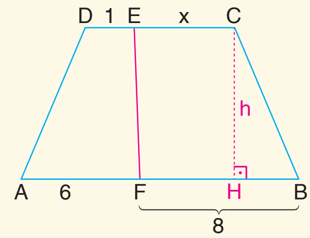
$$4A(AFED) = 2.A(FBCE) \Rightarrow 4.\frac{7.\cancel{h}}{\cancel{2}} = 2.\frac{(8+x).\cancel{h}}{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow 28 = 16 + 2x$$

$$\Rightarrow 12 = 2x$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ br bulunur.}$$

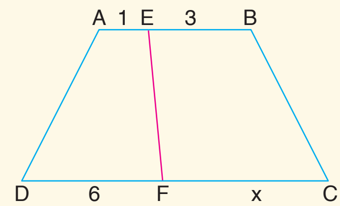
88. Şekil



Sıra Sizde

"89. Şekil"de verilen ABCD yamuğunda $[AB] // [DC]$, $|AE| = 1$ br, $|EB| = 3$ br, $|DF| = 6$ br ve $2.A(ADFE) = 3.A(EFCB)$ dir. Buna göre $|FC| = x$ değerini bulunuz.

89. Şekil

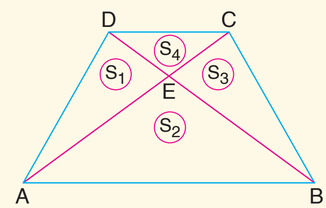


11. Örnek

"90. Şekil"deki ABCD yamuğunda $[AB] // [DC]$, $A(\widehat{AED}) = S_1$, $A(\widehat{AEB}) = S_2$, $A(\widehat{BEC}) = S_3$ ve $A(\widehat{DEC}) = S_4$ olsun. ABCD yamuğunda verilen alanlar ile ilgili aşağıdaki özelliklerin doğruluğunu gösterelim.

a. $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2.S_4}$ **b.** $A(ABCD) = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2$

90. Şekil



a. ABCD yamuğunda ADB ve ACB üçgenlerinin $[AB]$ tabanları ortak ve yükseklikleri eşit olduğundan,

$$A(\widehat{ADB}) = A(\widehat{ACB}) \Rightarrow S_1 + S_2 = S_2 + S_3$$

$$\Rightarrow S_1 = S_3 \text{ olur.}$$

Herhangi bir ABCD dörtgeninde köşegenlerin oluşturduğu alanlar için $S_2.S_4 = S_1.S_3$ tür.

O hâlde $S_1.S_3 = S_2.S_4 \Rightarrow S_1^2 = S_3^2 = S_2.S_4$

$$\Rightarrow S_1 = S_3 = \sqrt{S_2.S_4} \text{ bulunur.}$$

b. $A(ABCD) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ $\left(S_1 = S_3 = \sqrt{S_2.S_4} \textit{ olduğundan}\right)$

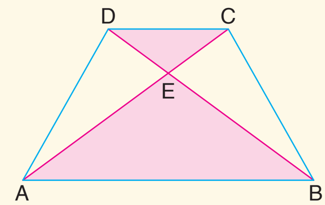
$$= S_2 + 2.\sqrt{S_2.S_4} + S_4$$

$$= \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2 \text{ bulunur.}$$

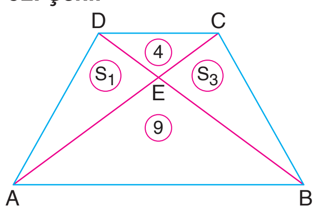
12. Örnek

"91. Şekil" deki ABCD yamuğunda [DC] // [AB], $A(\widehat{DEC}) = 4\ br^2$, $A(\widehat{AEB}) = 9\ br^2$ dir. Buna göre ABCD yamuğunun alanını bulalım.

91. Şekil



92. Şekil



1. Yol

$A(\widehat{AED}) = A(\widehat{CEB}) = \sqrt{4.9} = 6\ br^2$ dir.

$A(ABCD) = S_1 + S_3 + 4 + 9$

$= 6 + 6 + 4 + 9$

$= 25\ br^2$ bulunur.

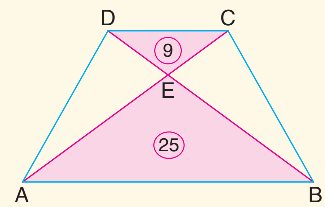
2. Yol

$A(ABCD) = \left(\sqrt{4} + \sqrt{9}\right)^2 = (2+3)^2 = 25\ br^2$ bulunur.

Sıra Sizde

"93. Şekil" deki ABCD yamuğunda [AB] // [DC], $A(\widehat{DEC}) = 9\ br^2$, $A(\widehat{AEB}) = 25\ br^2$ dir. Buna göre A(ABCD) nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.

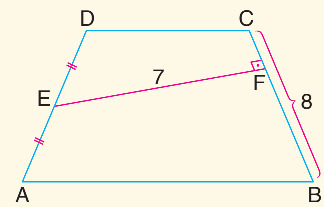
93. Şekil



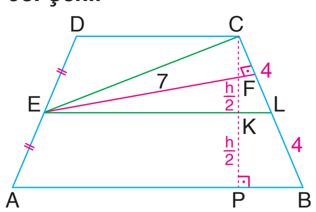
13. Örnek

"94. Şekil" deki ABCD yamuğunda [AB] // [CD], [EF] ⊥ [CB], |AE| = |ED|, |CB| = 8 br ve |EF| = 7 br dir. Buna göre ABCD yamuğunun alanını bulalım.

94. Şekil



95. Şekil



|CL| = |LB| olacak biçimde [EL] nı çizelim.

[EL] orta taban, |CL| = |CB| = 4 br olur.

[CP] ⊥ [AB] olacak biçimde [CP] nı çizelim. |CP| = h olsun.

Bu durumda $|CK| = |KP| = \dfrac{h}{2}$ olur.

$\widehat{ECL}$ nin alanını iki farklı biçimde yazabiliriz.

$A(\widehat{ECL}) = \dfrac{7.4}{2} = 14\ br^2$ dir.

$$A(\widehat{ECL}) = \frac{|EL|.|CK|}{2} = \frac{\frac{|AB|+|DC|}{2} \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{1}{4} \cdot \boxed{\frac{|AB|+|DC|}{2} \cdot h} \text{ olur.}$$

↓

A(ABCD)

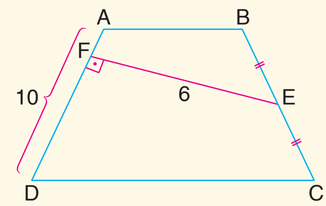
Bu durumda;

$14 = \frac{1}{4} . A(ABCD) \Rightarrow A(ABCD) = 56 \text{ br}^2$ bulunur.

Sıra Sizde

"96. Şekil" deki ABCD yamuğunda $[AB] // [CD]$, $|BE| = |EC|$, $[EF] \perp [AD]$, $|EF| = 6$ br ve $|AD| = 10$ br dir. Buna göre $A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.

96. Şekil

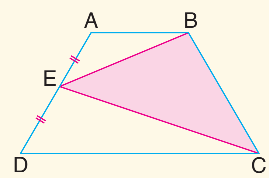


DÜŞÜNCE KUTUSU

"97. Şekil" deki ABCD yamuğunda $[AB] // [DC]$, $|AE| = |ED|$ olmak üzere $A(ABCD) = 2 . A(\widehat{EBC})$ olduğunu gösteriniz.

İpucu: ABCD yamuğunun orta tabanını çiziniz.

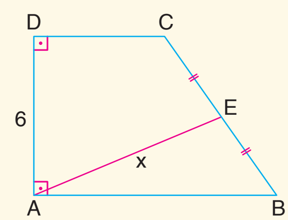
97. Şekil



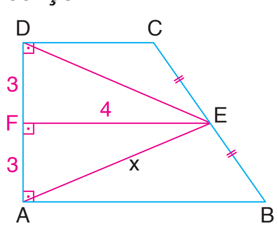
14. Örnek

"98. Şekil" deki ABCD dik yamuğunda $[AD] \perp [AB]$, $|CE| = |EB|$, $|AD| = 6$ br, $A(ABCD) = 24 \text{ br}^2$ dir. Buna göre $|AE| = x$ değerini bulalım.

98. Şekil



99. Şekil



$[EF] \perp [AD]$ olacak biçimde $[EF]$ nı ve ayrıca $[ED]$ nı çizelim. $[EF]$ orta taban olacağından $|DF| = |FA| = 3$ br olur.

$A(ABCD) = 2 . A(\widehat{DEA})$ olduğundan,

$A(\widehat{DEA}) = \frac{24}{2} = 12 \text{ br}^2$ olur.

$A(\widehat{DEA}) = 12 \Rightarrow \frac{|EF| . 6}{2} = 12 \Rightarrow |EF| = 4$ br dir.

EFA dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

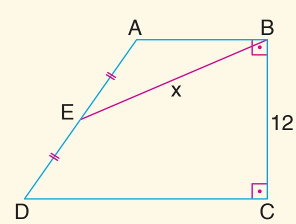
$x^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 25$

$\Rightarrow x = 5$ br bulunur.

Sıra Sizde

"100. Şekil" deki ABCD dik yamuğunda $[BC] \perp [DC]$, $|AE| = |ED|$, $|BC| = 12$ br, $A(ABCD) = 96 \text{ br}^2$ dir. Buna göre $|EB| = x$ değerini bulunuz.

100. Şekil

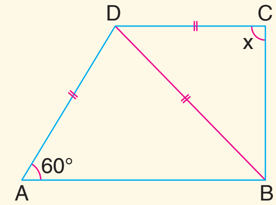


ALIŞTIRMALAR

1. “101. Şekil”deki ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [CD]$, $m(\widehat{BAD}) = 60°$,

$|AD| = |DB| = |DC|$ ise $m(\widehat{BCD}) = x$ kaç derecedir?

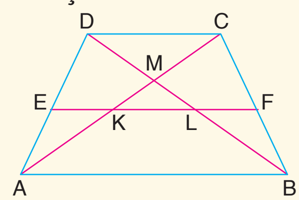
101. Şekil



2. “102. Şekil”deki ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [CD]$, $[EF]$ orta taban ve

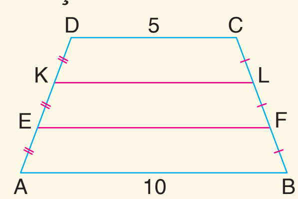
$|KA| = 3.|MK|$ dır. Verilenlere göre $\dfrac{|AB|}{|DC|}$ oranı kaçtır?

102. Şekil



3. “103. Şekil”deki ABCD yamuğunda $[DC] \parallel [KL] \parallel [EF] \parallel [AB]$, $|DK| = |KE| = |EA|$, $|CL| = |LF| = |FB|$, $|DC| = 5$ br ve $|AB| = 10$ br dir. Buna göre $|KL| + |EF|$ toplamını bulunuz.

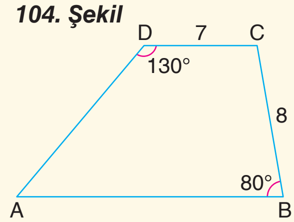
103. Şekil



4. “104. Şekil”deki ABCD yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$, $m(\widehat{CDA}) = 130°$,

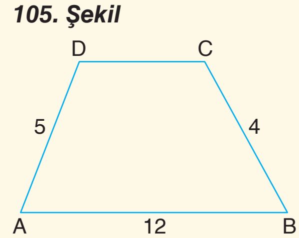
$m(\widehat{CBA}) = 80°$, $|DC| = 7$ br, $|BC| = 8$ br olduğuna göre $|AB|$ kaç br dir?

104. Şekil



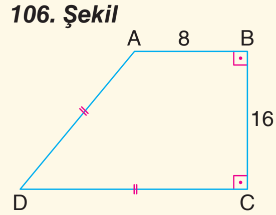
5. “105. Şekil”deki ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [CD]$, $m(\widehat{C}) = 2.m(\widehat{A})$, $|CB| = 4$ br, $|AD| = 5$ br ve $|AB| = 12$ br olduğuna göre ABCD yamuğunun çevresi kaç br dir?

105. Şekil



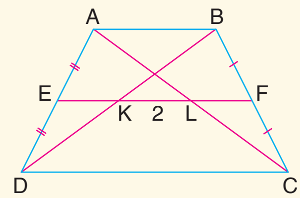
6. “106. Şekil”deki ABCD dik yamuğunda $[BC] \perp [DC]$, $|AD| = |DC|$, $|AB| = 8$ br, $|BC| = 16$ br ise $|DC|$ kaç br dir?

106. Şekil



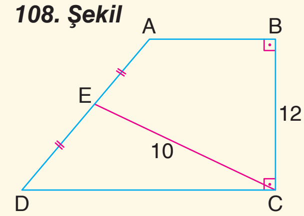
7. “107. Şekil”deki ABCD yamuğunda $[AB] // [CD]$, $[EF]$ orta taban, $|DC| = 2.|AB|$ ve $|KL| = 2$ br ise $|EF|$ kaç br dir?

107. Şekil



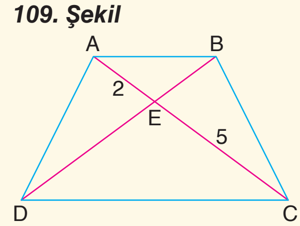
8. “108. Şekil”deki ABCD dik yamuğunda $[BC] \perp [DC]$, $|BC| = 12$ br dir. $|EC| = 10$ br ve $|DE| = |EA|$ ise $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?

108. Şekil



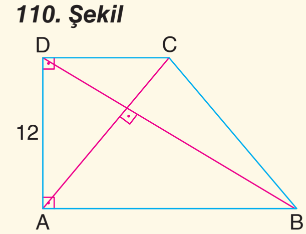
9. “109. Şekil”deki ABCD yamuğunda $[AB] // [DC]$, $|AE| = 2$ br ve $|EC| = 5$ br ise $\sqrt{\dfrac{A(\widehat{AEB})}{A(ABCD)}}$ değeri kaçtır?

109. Şekil



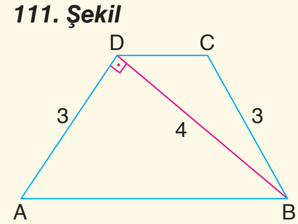
10. “110. Şekil”deki ABCD dik yamuğunda $[AD] \perp [AB]$, $|AD| = 12$ br ve $[AC] \perp [BD]$ dır. $|AB| = 4.|DC|$ ise $|AB|$ kaç br dir?

110. Şekil



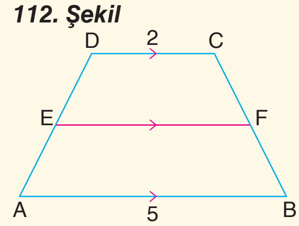
11. “111. Şekil”deki ABCD ikizkenar yamuğunda $[AB] // [DC]$, $[BD] \perp [AD]$, $|AD| = |BC| = 3$ br, $|BD| = 4$ br olduğuna göre $|DC|$ kaç br dir?

111. Şekil



12. “112. Şekil”deki ABCD yamuğunda $[AB] // [EF] // [DC]$, $|DC| = 2$ br, $|AB| = 5$ br, $\dfrac{A(DCFE)}{A(ABFE)} = \dfrac{5}{16}$ olduğuna göre $|EF|$ kaç br dir?

112. Şekil



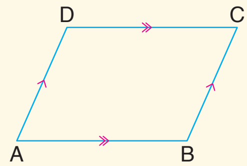
Paralelkenar

Günümüz mimarisi alıştığımızın dışında çok değişik yapılar karşımıza çıkarmaktadır. Binaların tasarımında özellikle geometrik şekillerin farklı kullanımları dikkat çekmektedir. Fransa'nın ilk devlet müzesi olan Louvre (Luvğ) Müzesi, Dünya'nın en çok ziyaret edilen sanat müzesi unvanını taşımaktadır. Yandaki fotoğrafta Louvre Müzesi'nin bahçesindeki cam piramit gösterilmiştir.

Sizce piramidin yüzeyleri neden paralelkenar şeklinde camlar kullanılarak kaplanmış olabilir?

Paralelkenar	Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgene **paralelkenar** denir. ABCD paralelkenarında $[AB] // [DC]$ ve $[AD] // [BC]$ dir.

113. Şekil



1. Örnek

Paralelkenarın özelliklerini inceleyelim.

a. Paralelkenarda karşılıklı açıların ölçüleri ve kenar uzunlukları birbirine eşittir.

"114. Şekil"deki ABCD paralelkenarında,

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{C})$ ve $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$ dir.

$|AB| = |DC|$ ve $|AD| = |BC|$ dir.

b. Paralelkenarda komşu açılar birbirinin bütünleridir.

"115. Şekil"deki ABCD paralelkenarında $\alpha + \beta = 180°$ dir.

c. Paralelkenarda köşegenler birbirini ortalar.

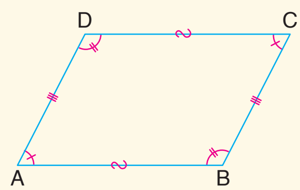
"116. Şekil"deki ABCD paralelkenarında $\overset{\frown}{AOB} \cong \overset{\frown}{COD}$ olduğundan,

$|DO| = |BO|$ ve $|AO| = |CO|$ dir.

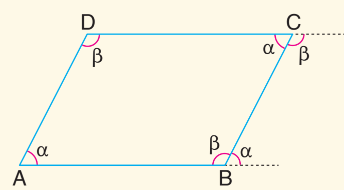
d. Paralelkenar köşegenlerinin her biri tarafından iki eş üçgene ayrılır. "117. Şekil"deki ABCD paralelkenarında,

$\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{CDA}$ ve $\overset{\frown}{ADB} \cong \overset{\frown}{CBD}$ dir.

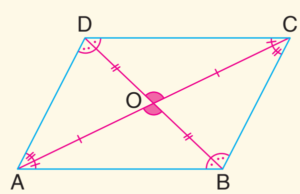
114. Şekil



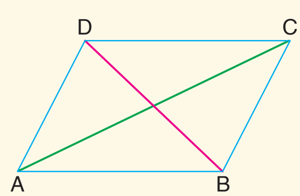
115. Şekil



116. Şekil



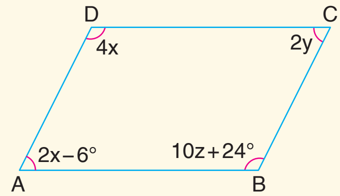
117. Şekil



2. Örnek

"118. Şekil" de verilen ABCD paralelkenarında $m(\widehat{A}) = 2x - 6°$, $m(\widehat{B}) = 10z + 24°$, $m(\widehat{C}) = 2y$, $m(\widehat{D}) = 4x$ tir. Buna göre x, y ve z değerlerini bulalım.

118. Şekil



ABCD paralelkenarında $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C})$ ve $m(\widehat{D}) = m(\widehat{B})$ dir. Buna göre,

$4x = 10z + 24°$ ... **(I)** ve $2x - 6° = 2y$ ... **(II)** olur.

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180° \Rightarrow 4x + 2x - 6° = 180°$

$\Rightarrow 6x = 186°$

$\Rightarrow x = 31°$ bulunur.

I ve **II** numaralı denklemlerde x değeri yerine yazılırsa,

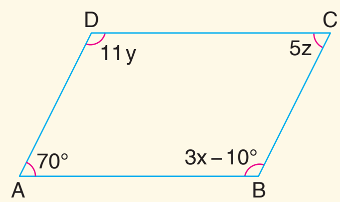
$4.31° = 10z + 24° \Rightarrow 10z = 100° \Rightarrow z = 10°$ ve

$2.31° - 6° = 2y \Rightarrow 56° = 2y \Rightarrow y = 28°$ bulunur.

Sıra Sizde

"119. Şekil"deki ABCD paralelkenarında $m(\widehat{A}) = 70°$, $m(\widehat{B}) = 3x - 10°$, $m(\widehat{C}) = 5z$, $m(\widehat{D}) = 11y$ olarak veriliyor. Buna göre x, y ve z değerlerini bulunuz.

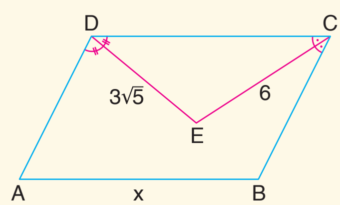
119. Şekil



3. Örnek

"120. Şekil" deki ABCD paralelkenarında [DE] ve [CE] açıortay, $|DE| = 3\sqrt{5}$ br, $|EC| = 6$ br dir. Buna göre $|AB| = x$ değerini bulalım.

120. Şekil



$m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{EDA}) = \alpha$ ve

$m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{ECB}) = \beta$ olsun

$m(\widehat{D}) + m(\widehat{C}) = 180°$ olduğundan

$2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$ dir.

Bu durumda $m(\widehat{DEC}) = 90°$ olur.

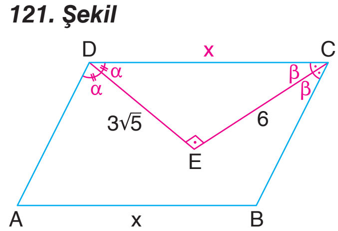
DEC dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

$x^2 = (3\sqrt{5})^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 = 45 + 36$

$\Rightarrow x^2 = 81$

$\Rightarrow x = 9$ br bulunur.

121. Şekil



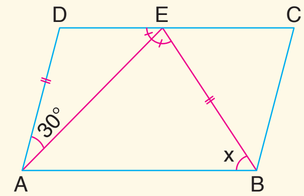
PROJE

203. sayfadaki projede "Projenin İçeriği" bölümündeki dördüncü adımı gerçekleştirebilirsiniz.

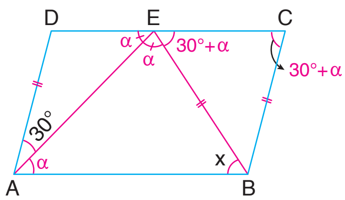
4. Örnek

"122. Şekil" de verilen ABCD paralelkenarında $m(\widehat{DEA}) = m(\widehat{AEB})$, $|AD| = |EB|$, $m(\widehat{DAE}) = 30°$ ve $m(\widehat{ABE}) = x$ olarak veriliyor. Verilenlere göre x in kaç derece olduğunu bulalım.

122. Şekil



123. Şekil



ABCD paralelkenar olduğundan,

$|AD| = |EB| \Rightarrow |EB| = |BC|$ olur.

$m(\widehat{AED}) = \alpha$ olsun. Bu durumda,

$m(\widehat{BAE}) = \alpha$ olur (iç ters açılar).

$m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{DAB}) = 30° + \alpha$ dır.

$\overset{\triangle}{EBC}$ ikizkenar üçgen olduğundan,

$m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{ECB}) = 30° + \alpha$ dır.

$m(\widehat{DEC}) = 180°$ olduğundan $\alpha + \alpha + 30° + \alpha = 180°$

$3\alpha = 150°$

$\alpha = 50°$ olur.

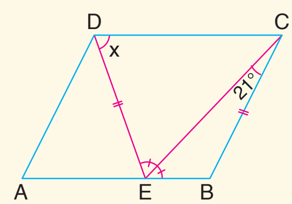
$\overset{\triangle}{AEB}$ nde $2\alpha + x = 180°$

$2.50° + x = 180° \Rightarrow x = 80°$ bulunur.

Sıra Sizde

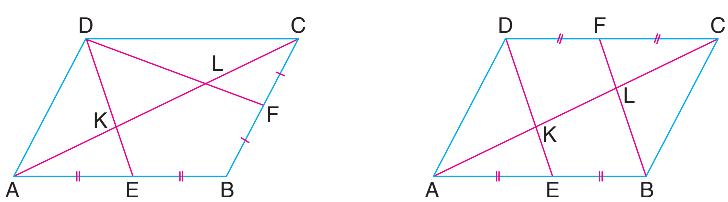
"124. Şekil" deki ABCD paralelkenarında $m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{CEB})$, $m(\widehat{ECB}) = 21°$, $|DE| = |EC|$ olduğuna göre $m(\widehat{EDC}) = x$ in kaç derece olduğunu bulunuz.

124. Şekil



DÜŞÜNCE KUTUSU

Aşağıdaki paralelkenarlarda E ve F bulundukları kenarların orta noktalarıdır. Her bir paralelkenarda $|AK| = |KL| = |LC|$ olduğunu gösteriniz.



Paralelkenarın Alanı

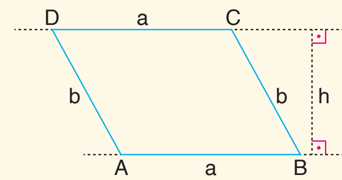
ETKİNLİK

- "125. Şekil"de verilen ABCD paralelkenarında [BD] köşegenini veya [AC] köşegenini çiziniz.
- Oluşan üçgenlerin alanlarını yazınız.

➢ Üçgenlerin alanlarını kullanarak paralelkenarın alanını veren bağıntıyı oluşturunuz.

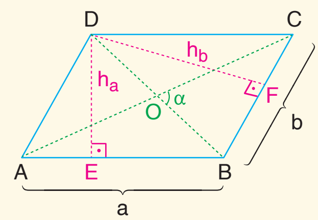
➢ h yüksekliği kullanılmadan paralelkenarın alanı nasıl bulunabilir? Tartışınız.

125. Şekil



Paralelkenarın Alanı	ABCD paralelkenarında, • $[DE] \perp [AB]$, $[DF] \perp [BC]$, $\lvert AB \rvert = a$, $\lvert BC \rvert = b$ ise $A(ABCD) = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ dir. • $\lvert AC \rvert = e$, $\lvert BD \rvert = f$ ve $m(\widehat{BOC}) = \alpha$ ise $A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \sin\alpha$ dır.

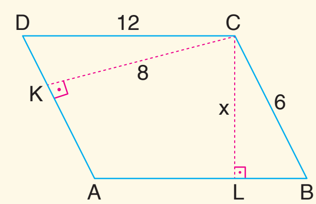
126. Şekil



6. Örnek

"127. Şekil"deki ABCD paralelkenarında $[CK] \perp [AD]$, $[CL] \perp [AB]$, $\lvert DC \rvert = 12$ br, $\lvert CB \rvert = 6$ br, $\lvert CK \rvert = 8$ br, $\lvert CL \rvert = x$ br olarak veriliyor. Buna göre $\lvert CL \rvert = x$ değerini bulalım.

127. Şekil



ABCD paralelkenar olduğundan $\lvert AD \rvert = 6$ br ve $\lvert AB \rvert = 12$ br dir.

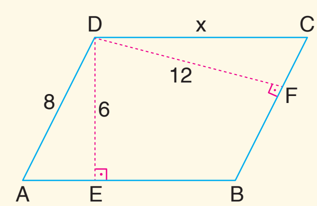
$A(ABCD) = \lvert AD \rvert \cdot \lvert CK \rvert = \lvert AB \rvert \cdot \lvert CL \rvert$ olduğundan,

$$6 \cdot 8 = 12 \cdot x \Rightarrow x = 4 \text{ br bulunur.}$$

Sıra Sizde

"128. Şekil"deki ABCD paralelkenarında $[DE] \perp [AB]$, $[DF] \perp [BC]$, $\lvert AD \rvert = 8$ br, $\lvert DE \rvert = 6$ br ve $\lvert DF \rvert = 12$ br dir. Buna göre $\lvert DC \rvert = x$ uzunluğunu bulunuz.

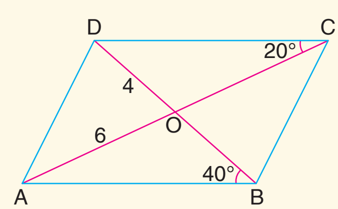
128. Şekil



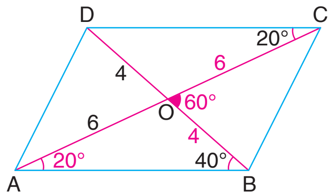
7. Örnek

"129. Şekil"de verilen ABCD paralelkenarında $m(\widehat{DCA}) = 20°$, $m(\widehat{DBA}) = 40°$, $\lvert DO \rvert = 4$ br, $\lvert AO \rvert = 6$ br dir. Buna göre ABCD paralelkenarının alanını bulalım.

129. Şekil



130. Şekil



ABCD paralelkenarında,

$|DB| = 8$ br, $|AC| = 12$ br,

$m(\widehat{BOC}) = 60°$ olur. Buna göre ABCD paralelkenarının alanı,

$$A(ABCD) = \frac{1}{2}|AC|.|BD|.\sin 60°$$

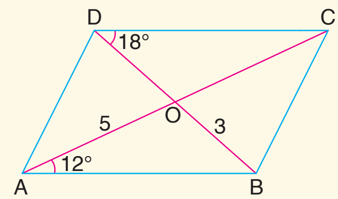
$$= \frac{1}{2}.12.8.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 24\sqrt{3} \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

"131. Şekil"deki ABCD paralelkenarında $m(\widehat{CAB}) = 12°$, $m(\widehat{BDC}) = 18°$, $|AO| = 5$ br, $|OB| = 3$ br dir. Buna göre ABCD paralelkenarının alanını bulunuz.

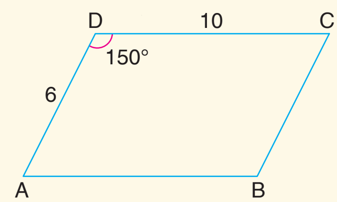
131. Şekil



8. Örnek

"132. Şekil" de verilen ABCD paralelkenarında $m(\widehat{ADC}) = 150°$, $|AD| = 6$ br ve $|DC| = 10$ br olarak veriliyor. Buna göre ABCD paralelkenarının alanını bulalım.

132. Şekil



ABCD paralelkenarında,

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180° \Rightarrow m(\widehat{A}) + 150° = 180°$$

$$\Rightarrow m(\widehat{A}) = 30° \text{ dir.}$$

Ayrıca $|AB| = |DC| = 10$ br olur. O hâlde,

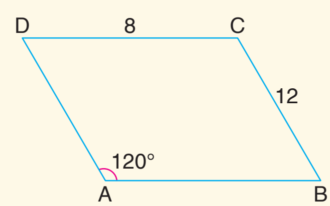
$$A(ABCD) = |AB|.|AD|.\sin 30°$$

$$A(ABCD) = 10.6.\frac{1}{2} = 30 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

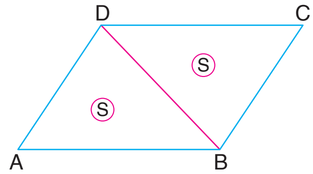
"133. Şekil"deki ABCD paralelkenarında $|DC| = 8$ br, $|BC| = 12$ br ve $m(\widehat{BAD}) = 120°$ dir. Buna göre ABCD paralelkenarının alanını bulunuz.

133. Şekil



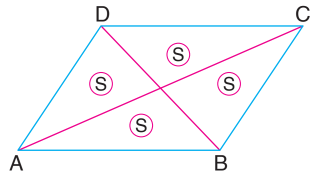
- Paralelkenarın bir köşegeni, paralelkenarın alanını iki eş bölgeye ayırır.

134. Şekil



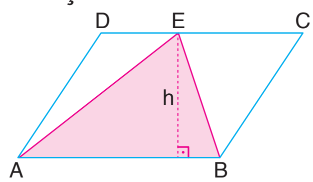
- Paralelkenarın köşegenleri, paralelkenarın alanını dört eş bölgeye ayırır.

135. Şekil



- Paralelkenarın tabanlarından biri üzerinde alınan herhangi bir nokta $(E \in [DC])$ diğer tabanın uç noktaları ile birleştirildiğinde oluşan üçgenin alanı, paralelkenarın alanının yarısına eşittir.

136. Şekil

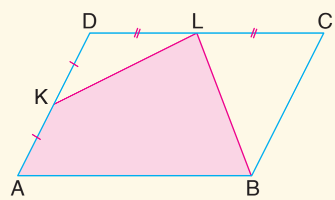


$$A(\overset{\frown}{AEB}) = \frac{|AB|.h}{2} \Rightarrow A(\overset{\frown}{AEB}) = \frac{A(ABCD)}{2}$$

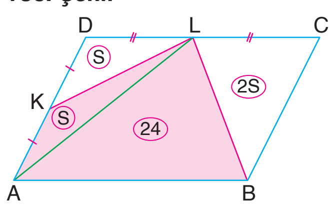
9. Örnek

"137. Şekil" deki ABCD paralelkenarında K ve L noktaları bulundukları kenarların orta noktalarıdır. A(ABCD) = 48 br² ise ABLK dörtgeninin alanını bulalım.

137. Şekil



138. Şekil



"138. Şekil" de [AL] nı çizelim.

$A(\overset{\frown}{LKD}) = A(\overset{\frown}{LKA})$ olur *(yükseklikleri ve tabanları eş üçgenler)*.

Benzer şekilde $A(\overset{\frown}{ADL}) = A(\overset{\frown}{BLC})$ olur.

$A(\overset{\frown}{ALB}) = \frac{A(ABCD)}{2}$ olduğundan $A(\overset{\frown}{ALB}) = \frac{48}{2} = 24$ br^2 dir.

$A(ABCD) = 48 \Rightarrow S + S + 24 + 2S = 48$

$4S = 24$

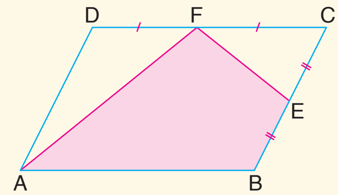
$S = 6$ br^2 dir.

$A(ABLK) = 24 + S = 24 + 6 = 30$ br^2 bulunur.

Sıra Sizde

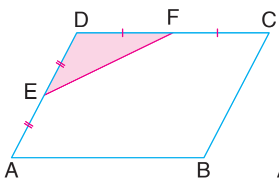
"139. Şekil"de verilen ABCD paralelkenarında E ve F bulundukları kenarların orta noktalarıdır. $A(ABCD) = 36$ br^2 ise $A(ABEF)$ nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.

139. Şekil

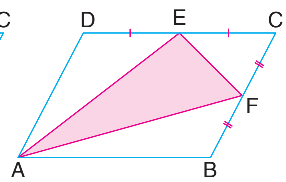


DÜŞÜNCE KUTUSU

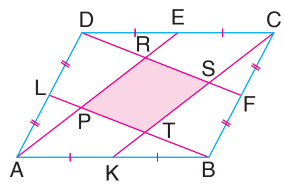
Aşağıdaki paralelkenarlarda verilen boyalı alanlar için altlarında verilen eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.



$A(\widehat{DEF}) = \dfrac{A(ABCD)}{8}$



$A(\widehat{AEF}) = \dfrac{3A(ABCD)}{8}$



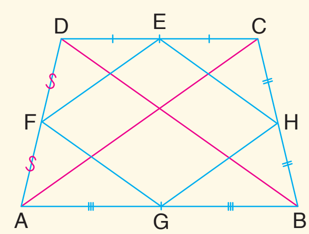
$A(PRST) = \dfrac{A(ABCD)}{5}$

ETKİNLİK

- "140. Şekil"de verilen ABCD dörtgeninde E, F, G ve H noktaları bulundukları kenarların orta noktalarıdır.
- $\widehat{AFG}$ ile $\widehat{ADB}$, $\widehat{ECH}$ ile $\widehat{DCB}$ ni karşılaştırınız. Bu üçgenler arasındaki ilişkiyi açıklayınız.
- Elde ettiğiniz sonuçtan yararlanarak [FG], [DB] ve [EH] larının paralel olup olmama durumunu ve uzunlukları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.
- $\widehat{DFE}$ ile $\widehat{DAC}$, $\widehat{BGH}$ ile $\widehat{BAC}$ ni karşılaştırınız. Bu üçgenler arasındaki ilişkiyi açıklayınız.
- Elde ettiğiniz sonuçtan yararlanarak [FE], [AC] ve [GH] larının paralel olup olmama durumunu ve uzunlukları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

➢ Etkinlik basamaklarından çıkardığınız sonuçlara göre EFGH dörtgeninin özelliklerini açıklayınız.

140. Şekil



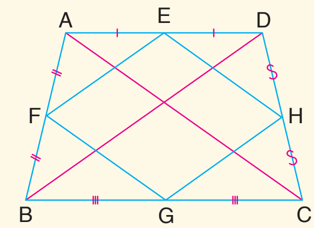
10. Örnek

"141. Şekil" de E, F, G ve H bulundukları kenarların orta noktaları ise;

a. **$Ç(EFGH) = |AC| + |BD|$ ve**

b. **$A(EFGH) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ olduğunu gösterelim.**

141. Şekil



a. $\overset{\frown}{ABD}$ nde E ve F bulundukları kenarların orta noktaları olduğundan $[EF]$ orta tabandır. Buna göre $[EF] \parallel [BD]$ ve $|EF| = \dfrac{|BD|}{2}$ dir. ... **(I)**

$\overset{\frown}{BCD}$ nde G ve H bulundukları kenarların orta noktaları olduğundan $[GH]$ orta tabandır. Buna göre $[GH] \parallel [BD]$ ve $|GH| = \dfrac{|BD|}{2}$ dir. .. **(II)**

I ve **II** numaralı ifadelerden $[EF] \parallel [GH]$ ... **(III)** ve $|EF| = |GH| = \dfrac{|BD|}{2}$ dir. ... **(IV)**

Benzer şekilde $\overset{\frown}{ABC}$ ve $\overset{\frown}{ADC}$ lerinde sırasıyla $[GF]$ ve $[EH]$ ların orta taban olduğu görülür.

Buradan $[GF] \parallel [EH]$ ... **(V)** ve $|GF| = |EH| = \dfrac{|AC|}{2}$ ... **(VI)** dir.

III ve **V** numaralı ifadelerden E, F, G ve H orta noktaları ile oluşturulan EFGH dörtgeninin paralelkenar olduğu görülür.

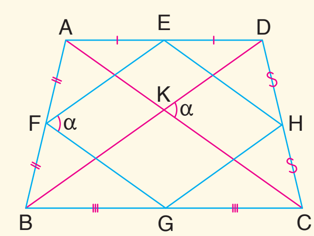
Ayrıca **III** ve **VI** numaralı eşitliklerden,

$$|EF| + |FG| + |GH| + |HE| = \frac{|BD|}{2} + \frac{|AC|}{2} + \frac{|BD|}{2} + \frac{|AC|}{2}$$

$$Ç(EFGH) = |AC| + |BD| \text{ olur.}$$

b. "142. Şekil" de $m(\overset{\frown}{DKC}) = \alpha$ olsun. $[EF] \parallel [BD]$ ve $[AC] \parallel [FG]$ olduğundan $m(\overset{\frown}{EFG}) = \alpha$ olur.

142. Şekil



$A(ABCD) = \dfrac{1}{2}.|AC|.|BD|.\sin\alpha$ ... **(I)** dir.

EFGH dörtgeni paralelkenardır. Bu durumda,

$$A(EFGH) = |EF|.|FG|.\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}|BD|.\frac{1}{2}|AC|.\sin\alpha$$

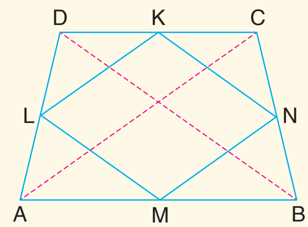
$$= \frac{1}{4}|AC|.|BD|.\sin\alpha \text{ ... (II) olur.}$$

I ve **II** den $A(EFGH) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ bulunur.

“143. Şekil” de K, L, M ve N bulundukları kenarların orta noktalarıdır. Buna göre;

- KLMN paralelkenardır.
- $Ç(KLMN) = |AC| + |BD|$ dir.
- $A(KLMN) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ dir.

143. Şekil



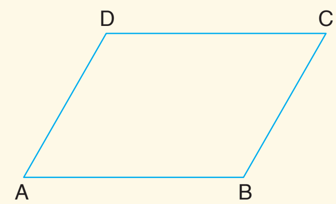
ETKİNLİK

Araç Gereç: kareli kâğıt, cetvel.

- Kareli kâğıda bir ABCD pararelkenarı çiziniz ve paralelkenarın iç bölgesinde bir P noktası belirleyiniz.
- P noktasını paralelkenarın köşeleri ile birleştiriniz.
- P noktasından geçen $[AB] // [EF] // [CD]$ olacak biçimde $[EF]$ çiziniz ($E \in [AD]$ ve $F \in [BC]$).
- $A(\widehat{APB})$ nı ABFE paralelkenarının alanından yararlanarak yazınız.
- Benzer şekilde $A(\widehat{DPC})$ nı EFCD paralelkenarının alanından yararlanarak yazınız.
- $A(\widehat{APB}) + A(\widehat{DPC})$ toplamının ABCD paralelkenarının alanı ile ilişkisini açıklayınız.
- Benzer adımları $A(\widehat{APD})$ ve $A(\widehat{BPC})$ için uygulayarak $A(\widehat{APD}) + A(\widehat{BPC})$ toplamının ABCD paralelkenarının alanı ile ilişkisini açıklayınız.

➢ Paralelkenarın içinde alınan bir noktanın köşelerle birleştirilmesi ile elde edilen üçgenlerin alanları ile paralelkenarın alanı arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

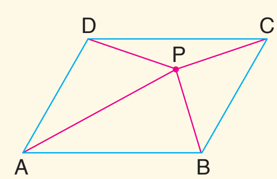
144. Şekil



ABCD paralelkenarının içinde bir P noktası alındığında,

$$A(\widehat{APB}) + A(\widehat{DPC}) = A(\widehat{DPA}) + A(\widehat{BPC}) = \frac{A(ABCD)}{2} \text{ olur.}$$

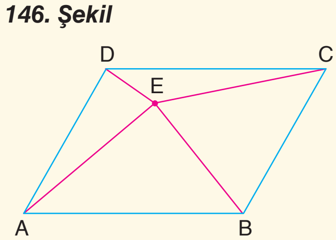
145. Şekil



11. Örnek

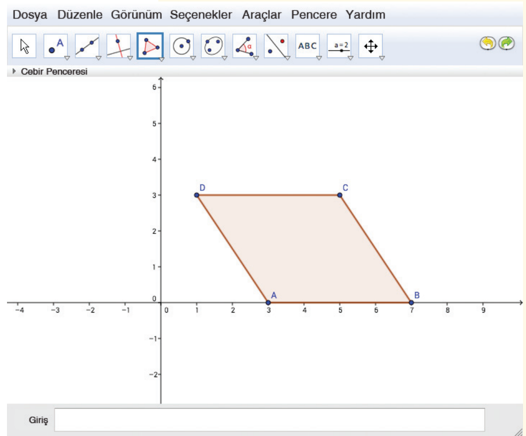
Bir ABCD paralelkenarının iç bölgesinde bir E noktası alındığında $A(\widehat{AEB}) + A(\widehat{DEC}) = A(\widehat{DEA}) + A(\widehat{BEC}) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ olduğunu dinamik geometrik yazılımı kullanarak gösterelim.

146. Şekil



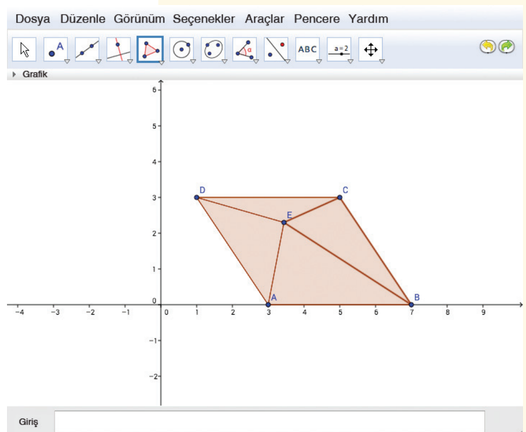
- Dinamik geometri yazılımında çokgen çizim butonunu tıklayalım ve köşelerinin koordinatları $A(3, 0)$, $B(7, 0)$, $C(5, 3)$ ve $D(1, 3)$ olan ABCD paralelkenarını çizelim.

147. Şekil



- Yeni nokta butonunu tıklayarak ABCD paralelkenarı içinde bir E noktası belirleyelim.

148. Şekil



- Yeniden çokgen çizimi butonunu tıklayarak AEB, DEC, DEA ve BEC üçgenlerini oluşturalım.

- Alan ölçme butonunu tıklayalım ve AEB, DEC, DEA ve BEC üçgenlerini seçelim.

$A(\widehat{AEB}) = 4{,}68 \text{ br}^2$, $A(\widehat{DEC}) = 1{,}32 \text{ br}^2$,

$A(\widehat{DEA}) = 3{,}12 \text{ br}^2$ ve $A(\widehat{BEC}) = 2{,}88 \text{ br}^2$ olur.

$A(ABCD) = 12 \text{ br}^2$,

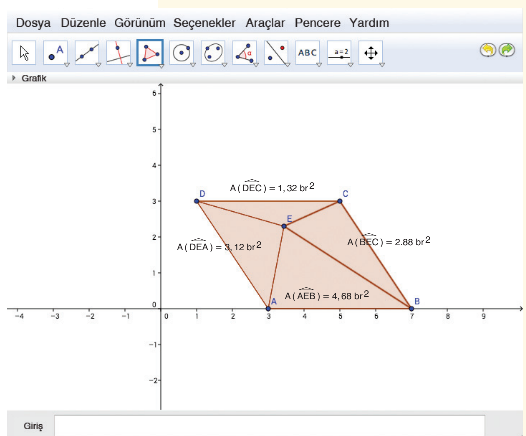
$A(\widehat{AEB}) + A(\widehat{DEC}) = 4{,}68 + 1{,}32 = 6$ ve

$A(\widehat{DEA}) + A(\widehat{BEC}) = 3{,}12 + 2{,}88 = 6$ olduğundan

$$A(\widehat{AEB}) + A(\widehat{DEC}) = A(\widehat{DEA}) + A(\widehat{BEC}) = \frac{A(ABCD)}{2}$$

olduğu görülür.

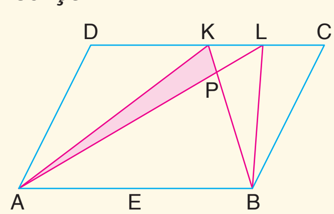
149. Şekil



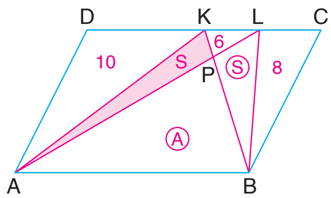
12. Örnek

"150. Şekil" de verilen ABCD paralelkenarında $[AL] \cap [KB] = \{P\}$, $A(\widehat{ADK}) = 10 \text{ br}^2$, $A(\widehat{KPL}) = 6 \text{ br}^2$, $A(\widehat{BLC}) = 8 \text{ br}^2$ ise APK üçgeninin alanını bulalım.

150. Şekil



151. Şekil



Tabanları ve yükseklikleri eşit olduğundan $A(\overset{\frown}{AKL}) = A(\overset{\frown}{BKL})$ dir.

$A(\overset{\frown}{APK}) = A(\overset{\frown}{BPL}) = S$ ve $A(\overset{\frown}{APB}) = A$ olsun.

$A(\overset{\frown}{AKB}) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ olduğundan,

$$A + S = \frac{10 + 6 + 8 + S + S + A}{2} \Rightarrow 2A + 2S = 24 + 2S + A$$

$$\Rightarrow A = 24 \text{ br}^2 \text{ olur.}$$

ABLK yamuğunda $6 . A = S . S \Rightarrow S^2 = 6 . 24$

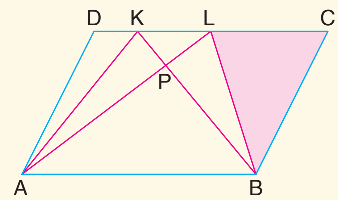
$$\Rightarrow S^2 = 144$$

$$\Rightarrow S = 12 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

"152. Şekil" deki ABCD paralelkenarında $A(\overset{\frown}{ADK}) = 6 \text{ br}^2$, $A(\overset{\frown}{PKL}) = 2 \text{ br}^2$, $A(\overset{\frown}{APK}) = 8 \text{ br}^2$ dir. Buna göre BLC üçgeninin alanını bulunuz.

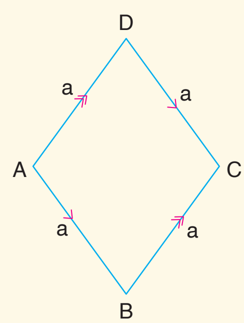
152. Şekil



Eşkenar Dörtgen

Eşkenar Dörtgen	Bütün kenar uzunlukları birbirine eşit olan paralelkenara **eşkenar dörtgen** denir.

153. Şekil



13. Örnek

Eşkenar dörtgenin özelliklerini inceleyelim.

a. Eşkenar dörtgen, bir paralelkenar olduğundan paralelkenarın tüm özelliklerini taşır.

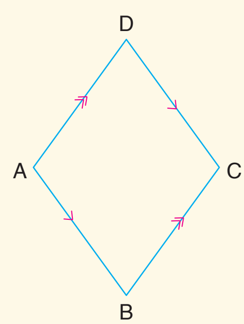
- $[AB] \,//\, [CD]$, $[BC] \,//\, [AD]$
- $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C})$, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$
- $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180°$ *(Komşu açılar birbirinin bütünleridir.)*

  $m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 180°$

  $m(\widehat{D}) + m(\widehat{A}) = 180°$

  $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$

154. Şekil



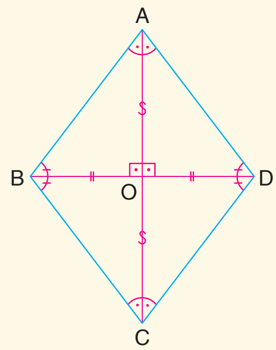
b. Eşkenar dörtgende köşegenler açıortaydır ve birbirini dik ortalar.

"155. Şekil" de ABCD eşkenar dörtgeni bir paralelkenar olduğundan,

$|BO| = |OD|$ ve $|AO| = |OC|$ dir. Bu durumda $\widehat{ABD}$ ikizkenar üçgeninde $m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{OAD})$ ve $[AO] \perp [BD]$ olur.

Benzer durum $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}$ ve $\widehat{CDA}$ için geçerli olduğundan [BD] ve [AC] köşegenleri açıortay olup birbirine diktir.

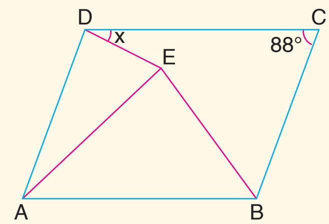
155. Şekil



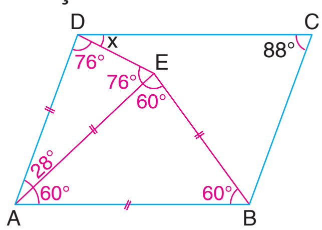
14. Örnek

"156. Şekil" de ABCD eşkenar dörtgen, EAB eşkenar üçgendir. $m(\widehat{BCD}) = 88°$ olduğuna göre $m(\widehat{CDE}) = x$ in kaç derece olduğunu bulalım.

156. Şekil



157. Şekil



ABE eşkenar üçgen ve ABCD eşkenar dörtgen olduğundan,

$|AB| = |BE| = |AE| = |AD|$ dir.

Bu durumda ADE ikizkenar üçgen olur.

$$m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{DAB}) = 88° \Rightarrow m(\widehat{EAD}) = m(\widehat{DAB}) - m(\widehat{EAB})$$

$$= 88° - 60°$$

$$= 28° \text{ olur.}$$

ADE ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{AED}) = 76°$ dir.

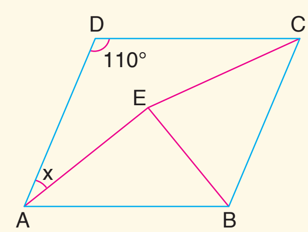
Eşkenar dörtgende $m(\widehat{ADC}) + m(\widehat{DAB}) = 180°$ dir. O hâlde,

$76° + x + 88° = 180° \Rightarrow x = 16°$ bulunur.

Sıra Sizde

"158. Şekil" deki ABCD eşkenar dörtgeninde, BEC eşkenar üçgen ve $m(\widehat{D}) = 110°$ dir. Verilenlere göre $m(\widehat{EAD}) = x$ in kaç derece olduğunu bulunuz.

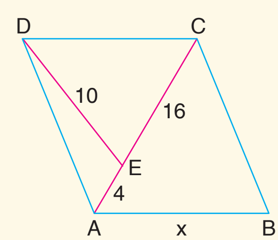
158. Şekil



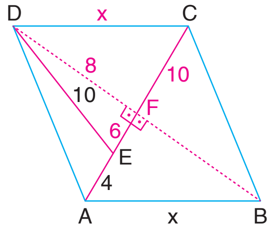
15. Örnek

"159. Şekil" de verilen ABCD eşkenar dörtgeninde $|DE| = 10$ br, $|AE| = 4$ br ve $|EC| = 16$ br dir. Verilenlere göre $|AB| = x$ in kaç birim olduğunu bulalım.

159. Şekil



160. Şekil



DB köşegenini çizelim. $[DF] \perp [AC]$,

$|AF| = |FC| = 10$ br ve $|EF| = 6$ br olur.

DEF dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$10^2 = |DF|^2 + 6^2 \Rightarrow |DF| = 8$ br olur.

DFC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa;

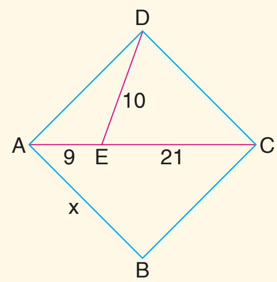
$|DC|^2 = 8^2 + 10^2 \Rightarrow |DC| = \sqrt{164}$

$= 2\sqrt{41}$ br bulunur.

Sıra Sizde

"161. Şekil"de verilen ABCD eşkenar dörtgeninde $|DE| = 10$ br, $|AE| = 9$ br, $|EC| = 21$ br dir. Buna göre $|AB| = x$ in kaç br olduğunu bulunuz.

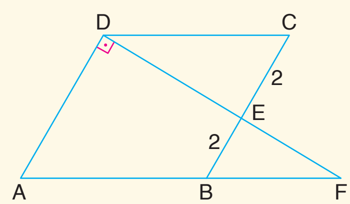
161. Şekil



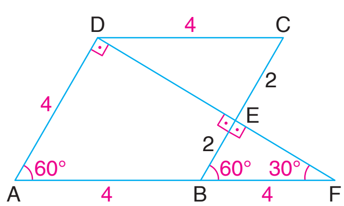
16. Örnek

"162. Şekil" deki ABCD eşkenar dörtgeninde $|CE| = |EB| = 2$ br, $[DF] \perp [AD]$ dir. $|DF|$ nun kaç birim olduğunu bulalım.

162. Şekil



163. Şekil



$[AD] // [BC]$ olduğundan,

$[DF] \perp [AD] \Rightarrow [DF] \perp [BC]$ olur.

EBF ve DAF üçgenlerinin benzerliğinden $|BF| = 4$ br olur.

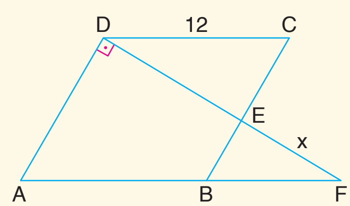
DAF üçgeninde hipotenüs uzunluğu dik kenarın uzunluğunun iki katı olduğundan DAF dik üçgeni $30° - 60° - 90°$ üçgenidir.

Bu durumda $|DF| = \sqrt{3}\,|DA| = 4\sqrt{3}$ br bulunur.

Sıra Sizde

"164. Şekil"deki ABCD eşkenar dörtgeninde $|EC| = 3|EB|$, $|DC| = 12$ br ve $[DF] \perp [AD]$ dir. $|EF| = x$ in kaç birim olduğunu bulunuz.

164. Şekil



Eşkenar Dörtgenin Alanı

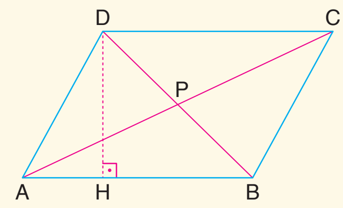
ETKİNLİK

"165. Şekil"de verilen ABCD eşkenar dörtgeninde $|AB| = a$, $|DH| = h$, $|AC| = e$, $|DB| = f$ ve $[AC] \cap [DB] = \{P\}$ olsun.

- ABD ve BCD üçgenlerinin alanlarını a ve h uzunluklarını kullanarak yazınız. A(ABCD) nı bu üçgenlerin alanlarından yararlanarak ifade ediniz.
- ABCD dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu göz önünde bulundurarak $\widehat{BPC}$ nın ölçüsünü belirleyiniz.
- Köşegen uzunlukları ve $\widehat{BPC}$ nın ölçüsünden yararlanarak ABCD eşkenar dörtgeninin alanını veren ifadeyi yazınız.

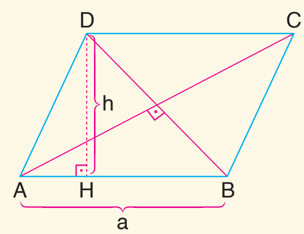
➢ Etkinlik basamaklarından çıkardığınız sonuçlara göre bir eşkenar dörtgenin alanını nasıl bulunacağını açıklayınız.

165. Şekil



Eşkenar Dörtgenin Alanı	ABCD eşkenar dörtgeninde; $|DH| = h$, $|AC| = e$, $|BD| = f$, $|AB| = a$ ise, $A(ABCD) = a.h$ $A(ABCD) = \dfrac{e.f}{2}$ $A(ABCD) = a^2.\sin \widehat{A}$ dır.

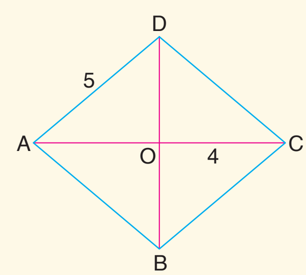
166. Şekil



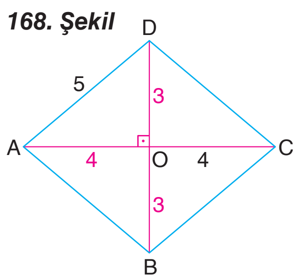
17. Örnek

"167. Şekil"deki ABCD eşkenar dörtgeninde $|AD| = 5$ br, $|OC| = 4$ br ise ABCD eşkenar dörtgeninin alanını bulalım.

167. Şekil



168. Şekil



ABCD eşkenar dörtgeninde $[AC] \perp [BD]$ ve $|AO| = |OC| = 4$ br dir.

$\widehat{DOA}$ nde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$|DO|^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow |DO| = 3$ br olur.

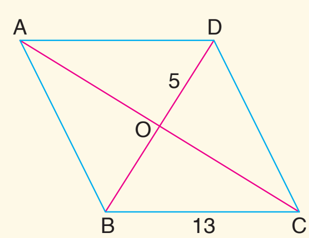
Bu durumda $|DO| = |OB| = 3$ br dir.

$A(ABCD) = \dfrac{8.6}{2} = 24$ br^2 bulunur.

Sıra Sizde

"169. Şekil"deki ABCD eşkenar dörtgeninde, $|OD| = 5$ br, $|BC| = 13$ br dir. Buna göre ABCD eşkenar dörtgeninin alanının kaç br^2 olduğunu bulunuz.

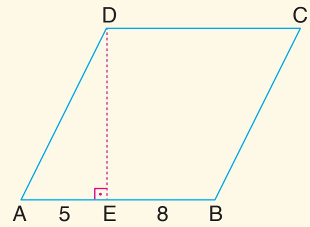
169. Şekil



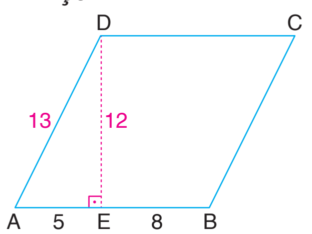
18. Örnek

"170. Şekil" deki ABCD eşkenar dörtgeninde $[DE] \perp [AB]$, $|AE| = 5$ br, $|EB| = 8$ br dir. Buna göre ABCD eşkenar dörtgeninin alanını bulalım.

170. Şekil



171. Şekil



ABCD eşkenar dörtgen olduğundan,

$|AB| = |AD| = 13$ br dir. DEA dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

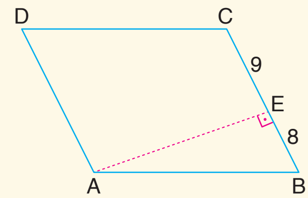
$13^2 = |DE|^2 + 5^2 \Rightarrow |DE| = 12$ br olur.

$A(ABCD) = 12 \cdot 13 = 156 \text{ br}^2$ bulunur.

Sıra Sizde

"172. Şekil" deki ABCD eşkenar dörtgeninde, $[AE] \perp [BC]$, $|CE| = 9$ br, $|EB| = 8$ br ise ABCD eşkenar dörtgeninin alanını bulunuz.

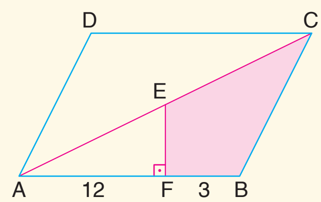
172. Şekil



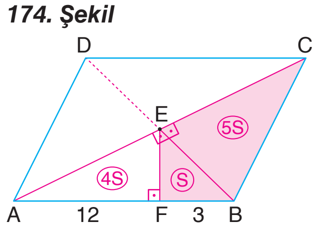
19. Örnek

"173. Şekil" deki ABCD eşkenar dörtgeninde $[EF] \perp [AB]$, $|AF| = 12$ br, $|FB| = 3$ br, $|AC| = 2|EC|$ ise EFBC dörtgeninin alanını bulalım.

173. Şekil



174. Şekil



E noktası $[AC]$ nın orta noktasıdır. Bu durumda BD köşegeni E noktasından geçer ve $[BD] \perp [AC]$ olur.

$\overset{\frown}{AEB}$ nde $A(\overset{\frown}{EFB}) = S$ olsun.

Bu durumda $A(\overset{\frown}{EFA}) = 4S$ olur.

$A(\overset{\frown}{EAB}) = A(\overset{\frown}{EBC})$ olduğundan $A(\overset{\frown}{EBC}) = 5S$ dir.

$|EF|$ nu bulalım. EAB dik üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa,

$|EF|^2 = 3 \cdot 12 \Rightarrow |EF| = 6$ br bulunur.

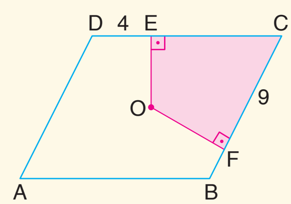
O halde $A(\overset{\frown}{EFB}) = S = \dfrac{6 \cdot 3}{2} = 9 \text{ br}^2$ dir.

$A(EFBC) = 6S \Rightarrow A(EFBC) = 6 \cdot 9 = 54 \text{ br}^2$ bulunur.

Sıra Sizde

"175. Şekil" deki ABCD eşkenar dörtgeninde O noktası köşegenlerin kesim noktasıdır. $[OE] \perp [CD]$, $[OF] \perp [BC]$, $|DE| = 4$ br ve $|FC| = 9$ br ise $A(CFOE)$ nı bulunuz.

175. Şekil

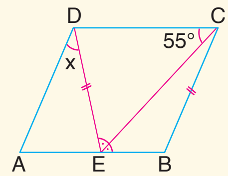


ALIŞTIRMALAR

1. "176. Şekil"deki ABCD paralelkenarında $m(\widehat{ECD}) = 55°$,

$|DE| = |BC|$ ve $m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{CEB})$ ise $m(\widehat{ADE}) = x$ kaç derecedir?

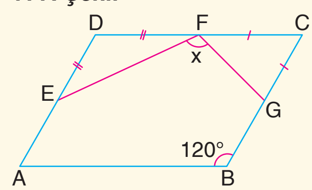
176. Şekil



2. "177. Şekil"deki ABCD paralelkenarında $m(\widehat{ABC}) = 120°$,

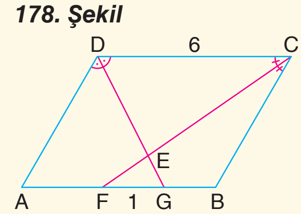
$|DE| = |DF|$ ve $|FC| = |CG|$ ise, $m(\widehat{EFG}) = x$ kaç derecedir?

177. Şekil



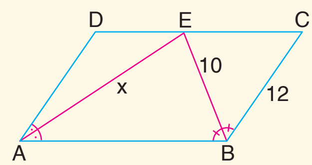
3. "178. Şekil"deki ABCD paralelkenarında [DG] ve [FC] açıortay, $|FG| = 1$ br, $|DC| = 6$ br ise Ç(ABCD) kaç birimdir?

178. Şekil



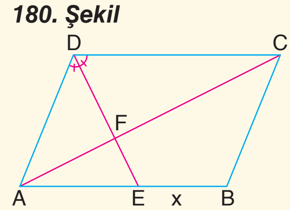
4. "179. Şekil"deki ABCD paralelkenarında [AE] ve [EB] açıortay, $|EB| = 10$ br, $|BC| = 12$ br ise $|EA| = x$ kaç birimdir?

179. Şekil



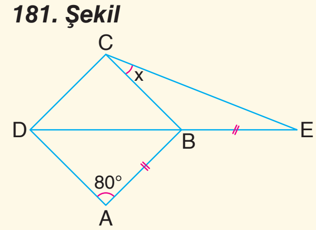
5. "180. Şekil"deki ABCD paralelkenarında [DE] açıortay, $|DF| = 3|EF|$ ve Ç(ABCD) = 16 br dir. Buna göre $|EB| = x$ kaç birimdir?

180. Şekil



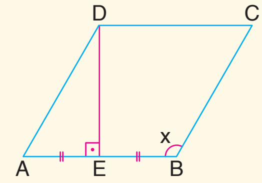
6. "181. Şekil"deki ABCD eşkenar dörtgeninde $E \in [DB$, $|BE| = |AB|$ ve $m(\widehat{DAB}) = 80°$ ise $m(\widehat{BCE}) = x$ kaç derecedir?

181. Şekil



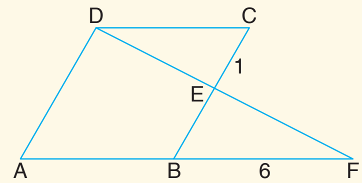
7. "182. Şekil"deki ABCD eşkenar dörtgeninde $|AE| = |EB|$ ve $[DE] \perp [AB]$ dir. $m(\widehat{ABC}) = x$ kaç derecedir?

182. Şekil



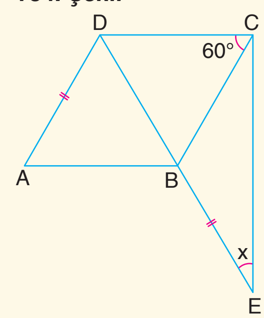
8. "183. Şekil"deki ABCD eşkenar dörtgeninde $[DE \cap [AB = \{F\}$, $|EC| = 1$ br ve $|BF| = 6$ br dir. Buna göre Ç(ABCD) ni bulunuz.

183. Şekil



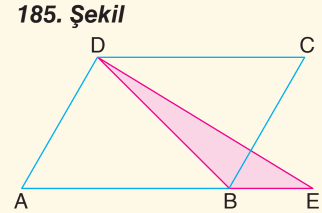
9. "184. Şekil"deki ABCD eşkenar dörtgeninde $|AD| = |BE|$ ve $m(\widehat{BCD}) = 60°$ dir. Buna göre $m(\widehat{DEC}) = x$ kaç derecedir?

184. Şekil



10. "185. Şekil"deki ABCD paralelkenarında $5|AB| = 4|AE|$ ve $A(\widehat{DBE}) = 7$ br^2 ise A(ABCD) kaç br^2 dir?

185. Şekil



11. "186. Şekil"deki ABCD dörtgeninde verilenlere göre aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

a. ☐ $Ç(KLMN) = \dfrac{|AB| + |CD|}{2}$ dir.

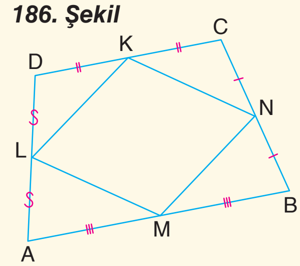
b. ☐ $A(ABCD) = \dfrac{A(KLMN)}{2}$ dir.

c. ☐ KLMN dörtgeni paralelkenardır.

d. ☐ $A(ABCD) = 40$ br^2 ise $A(KLMN) = 20$ br^2 dir.

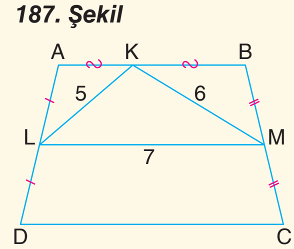
e. ☐ KLMN dörtgeni ABCD dikdörtgen olduğunda eşkenar dörtgen olur.

186. Şekil



12. "187. Şekil"deki ABCD dörtgeninde K, L ve M bulundukları kenarların orta noktaları, $|KL| = 5$ cm, $|KM| = 6$ cm ve $|LM| = 7$ cm olduğuna göre ABCD dörtgeninin alanını bulunuz.

187. Şekil



13. “188. Şekil”deki ABCD dörtgeninde E, F ve G bulundukları kenarların orta noktalarıdır. Verilenlere göre ABCD dörtgeninin alanını bulunuz.

14. “189. Şekil”deki ABCD paralelkenarında $A(ABCD) = 60$ br^2 ise $A(AFCE)$ kaç br^2 dir?

15. “190. Şekil”deki ABCD paralelkenarında $2|DE| = |EB|$ ve $A(ABCD) = 120$ br^2 dir. Buna göre $A(EBCF)$ kaç br^2 dir?

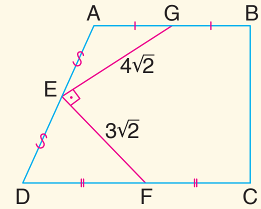
16. “191. Şekil”deki ABCD paralelkenarında $A(DKBC) = 48$ br^2, $|AE| = |EB|$, $|DF| = |FA|$ ise $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?

17. “192. Şekil”deki ABCD eşkenar dörtgeninde $[AB \perp [CE]$, $A(ABCD) = 20$ br^2, $|AB| = 5$ br ise $|BE| = x$ kaç br dir?

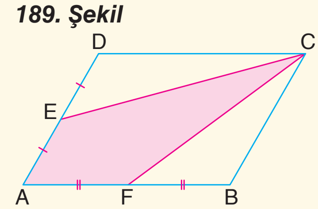
18. “193. Şekil”deki ABCD eşkenar dörtgeninde $|AC| = |DC|$, $|FE| = 4$ br ve $|DE| = |EC|$ ise $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?

19. “194. Şekil”deki ABCD eşkenardörtgen $|KA| = |AD| = 5$ br, $|KD| = 4\sqrt{5}$ br ise $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?

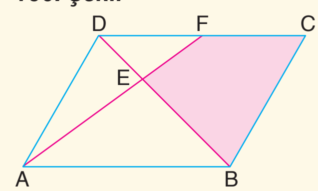
188. Şekil



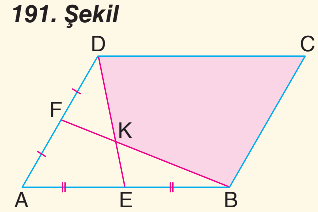
189. Şekil



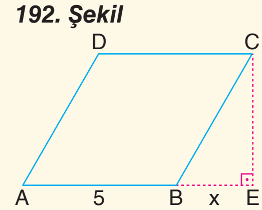
190. Şekil



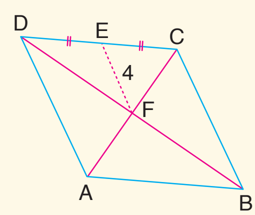
191. Şekil



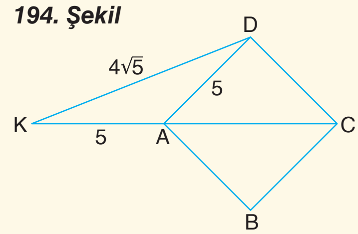
192. Şekil



193. Şekil

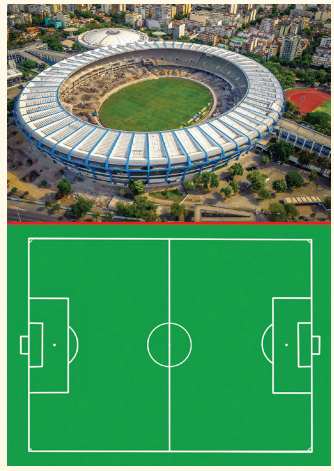


194. Şekil



Dikdörtgen

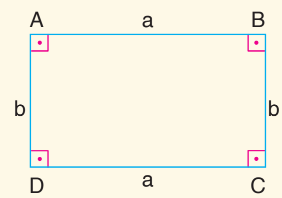
Futbol, on bir oyuncudan oluşan iki takım ve bir futbol topu ile oynanan dünyanın en popüler sporudur. Ayakla oynanan top oyunlarının tarihinin Sümerler'e kadar uzandığı bilinmektedir. Günümüz modern futbolunun temeli de Romalı askerler arasında oynanan "harpastum" adlı oyundur. Günümüzde büyük bir endüstri haline gelen futbol, stadyumlarda oynanmaktadır. Dünyanın en büyük kapasiteli stadyumu 200 bin seyirci kapasitesine sahip Brezilya'da bulunan Maracana (Marakına) Stadyumu'dur. Stadyumlardaki seyirci sayıları farklılık gösterse de futbolun oynandığı dikdörtgen şeklindeki çim saha belirli standartlara sahiptir.



Sizce futbol oynanacak bir saha için ihtiyaç olan çimin yüzey alanı ile dikdörtgen şeklindeki sahanın boyutları arasında nasıl bir ilişki vardır?

Dikdörtgen	Bütün iç açıları dik açı olan paralelkenara **dikdörtgen** denir.

195. Şekil



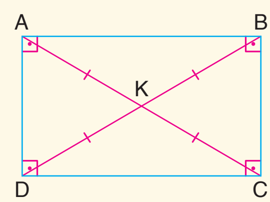
1. Örnek

Dikdörtgenin özelliklerini inceleyelim.

a. Dikdörtgen aynı zamanda bir paralelkenar olduğundan paralelkenarın tüm özelliklerini taşır.

- $[AB] // [DC]$, $[AD] // [BC]$
- $|AB| = |DC|$, $|AD| = |BC|$

196. Şekil

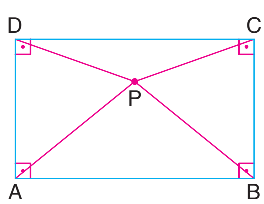


b. Köşegen uzunlukları eşit olup köşegenler birbirini ortalar.

- ABD ve CBD dik üçgenlerinde Pisagor teoremi uygulanırsa, $|AC| = |BD|$ olduğu görülür.
- ABCD dikdörtgeni aynı zamanda paralelkenar olduğundan, $|AK| = |KC| = |BK| = |KD|$ dir.

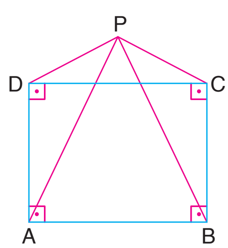
c. Bir ABCD dikdörtgeni ile aynı düzlemde alınan herhangi bir P noktasının karşılıklı köşelere olan uzaklıklarının kareleri toplamı birbirine eşittir.

197. Şekil



$$|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$$

198. Şekil

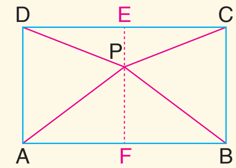


$$|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$$

PROJE

203. sayfadaki projede "Projenin İçeriği" bölümündeki beşinci adımı gerçekleştirebilirsiniz.

199. Şekil



ABCD dikdörtgeninde [EF] // [AD] // [BC] olacak şekilde [EF] nı çizelim. PAF ve PFB dik üçgenlerinde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$$\left.\begin{array}{l}|PF|^2=|PA|^2-|AF|^2\\|PF|^2=|PB|^2-|FB|^2\end{array}\right\}\ |PA|^2-|AF|^2=|PB|^2-|FB|^2\ \ldots\ \textbf{(I)}\ \text{olur.}$$

PED ve PEC dik üçgenlerinde de Pisagor teoremini uygulayalım.

$$\left.\begin{array}{l}|PE|^2=|PC|^2-|EC|^2\\|PE|^2=|PD|^2-|ED|^2\end{array}\right\}\ |PC|^2-|EC|^2=|PD|^2-|ED|^2\ \ldots\ \textbf{(II)}\ \text{olur.}$$

I ve **II** eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$|PA|^2-\cancel{|AF|^2}+|PC|^2-\cancel{|EC|^2}=|PB|^2-\cancel{|FB|^2}+|PD|^2-\cancel{|ED|^2}$$

($|AF|=|ED|$ ve $|EC|=|FB|$ dir.)

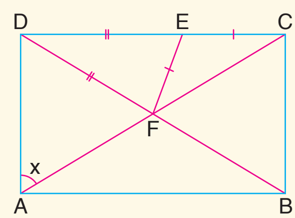
$$|PA|^2+|PC|^2=|PB|^2+|PD|^2 \ \text{ elde edilir.}$$

Sıra Sizde

Bir ABCD dikdörtgeninin içinde alınan bir P noktasının A, B ve C köşelerine uzaklığı sırasıyla 15 br, 7 br ve 20 br dir. Buna göre P noktasının D köşesine uzaklığını bulunuz.

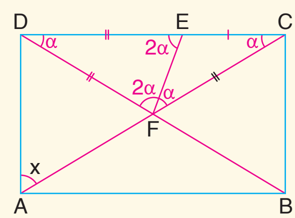
2. Örnek

200. Şekil



"200. Şekil" de verilen ABCD dikdörtgeninde [AC] ve [BD] köşegen, $|DE|=|DF|$, $|EF|=|EC|$ ise $m(\widehat{DAC})=x$ in kaç derece olduğunu bulalım.

201. Şekil



EFC ikizkenar üçgeninde, $m(\widehat{EFC})=m(\widehat{ECF})=\alpha$ olsun. DEF ikizkenar üçgeninde $m(\widehat{FED})=m(\widehat{EFD})=2\alpha$ olur. Dikdörtgende eş olan köşegenler birbirini ortaladığından $|DF|=|FC|$ olur. DFC ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{FDC})=m(\widehat{FCD})=\alpha$ dır.

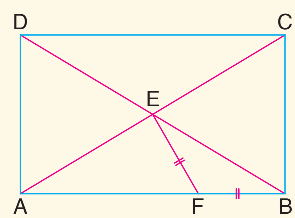
DFC üçgeninin iç açılar toplamından $\alpha+3\alpha+\alpha=180° \Rightarrow \alpha=36°$ bulunur.

ADC üçgeninin iç açılar toplamından $\alpha+x+90°=180° \Rightarrow x+126°=180°$

$\Rightarrow x=54°$ bulunur.

Sıra Sizde

202. Şekil



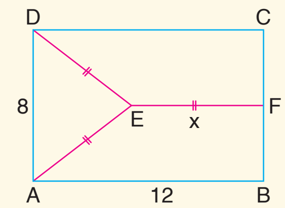
"202. Şekil"deki ABCD dikdörtgeninde [AC] ve [BD] köşegen,

$|EF|=|FB|$ ve $m(\widehat{AFE})=82°$ ise $m(\widehat{ADB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

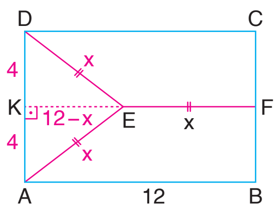
3. Örnek

“203. Şekil”deki ABCD dikdörtgeninde $[EF] \perp [BC]$, $|AD| = 8$ br, $|AB| = 12$ br ve $|DE| = |EA| = |EF|$ dir. $|EF| = x$ uzunluğunu bulalım.

203. Şekil



204. Şekil



[EF] nı $[EK] \perp [AD]$ olacak biçimde uzatalım.

DEA ikizkenar üçgen olduğundan,

$|DK| = |KA| = 4$ br olur.

$|EF| = x$ ise $|EK| = 12 – x$ tir.

$\widehat{EKA}$ dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$(12 – x)^2 + 4^2 = x^2 \Rightarrow 144 – 24x + x^2 + 16 = x^2$

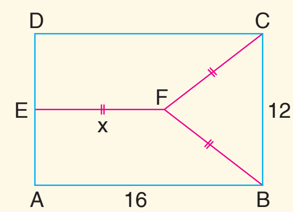
$\Rightarrow 24x = 160$

$\Rightarrow x = \frac{20}{3}$ br bulunur.

Sıra Sizde

“205. Şekil”de verilen ABCD dikdörtgeninde [EF] // [AB], $|AB| = 16$ br, $|BC| = 12$ br ve $|EF| = |FB| = |FC|$ ise $|EF| = x$ uzunluğunu bulunuz.

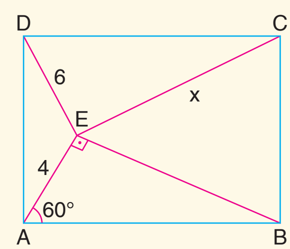
205. Şekil



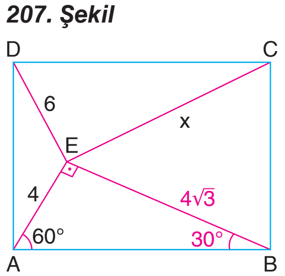
4. Örnek

“206. Şekil”deki ABCD dikdörtgeninde $[AE] \perp [EB]$, $m(\widehat{EAB}) = 60°$, $|AE| = 4$ br, $|DE| = 6$ br ise $|EC| = x$ in kaç birim olduğunu bulalım.

206. Şekil



207. Şekil



AEB dik üçgeni 30° – 60° – 90° üçgenidir.

Bu durumda $|EB| = \sqrt{3}\,|AE| = 4\sqrt{3}$ br olur.

Dikdörtgen içindeki E noktasının köşelere uzaklığı arasında,

$|EA|^2 + |EC|^2 = |DE|^2 + |EB|^2$ bağıntısı bulunur. O hâlde,

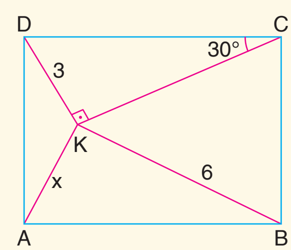
$16 + x^2 = 36 + 48$

$x^2 = 68 \Rightarrow x = 2\sqrt{17}$ br bulunur.

Sıra Sizde

“208. Şekil”deki ABCD dikdörtgeninde $[DK] \perp [KC]$, $m(\widehat{KCD}) = 30°$, $|DK| = 3$ br, $|KB| = 6$ br ise $|AK| = x$ uzunluğunu bulunuz.

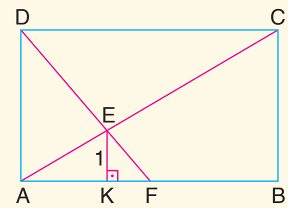
208. Şekil



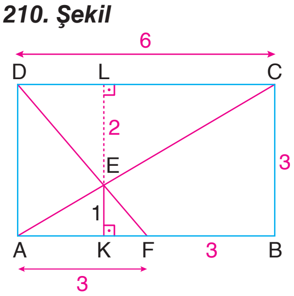
5. Örnek

"209. Şekil" de verilen ABCD dikdörtgeninde $[AC] \cap [DF] = \{E\}$, $[EK] \perp [AF]$, $|AF| = |FB|$, $|AB| = 6$ br ve $|EK| = 1$ br ise $|AC|$ nu bulalım.

209. Şekil



210. Şekil



$|AF| = 3$ br ve $|DC| = 6$ br dir. $[EL] \perp [DC]$ olacak biçimde $[EL]$ çizelim.

$\widehat{EDC} \sim \widehat{EFA}$ olup benzer üçgenlerin yükseklikleri arasında da benzerlik oranı bulunduğundan,

$$\frac{6}{3} = \frac{|EL|}{1} \Rightarrow |EL| = 2 \text{ br olur.}$$

Bu durumda,

$|LK| = |CB| = 2 + 1 = 3$ br dir.

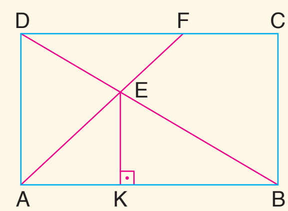
ACB dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$|AC|^2 = 6^2 + 3^2 \Rightarrow |AC| = 3\sqrt{5}$ br bulunur.

Sıra Sizde

"211. Şekil" de verilen ABCD dikdörtgeninde $[BD] \cap [AF] = \{E\}$, $[EK] \perp [AB]$, $2|DF| = 3|FC|$, $|AB| = 10$ br, $[EK] = 5$ br ise $|BD|$ nu bulunuz.

211. Şekil



Dikdörtgenin Alanı

ETKİNLİK

Araç Gereç: kareli kâğıt, cetvel.

- Kareli kâğıda alanı 12 birimkare olan dikdörtgenler çiziniz. Bu çizim dikdörtgenlerin kenar uzunlukları tam sayı olacak şekilde kaç farklı biçimde yapılabilir?
- Benzer şekilde kareli kâğıda alanı 24 birimkare olan dikdörtgenler çiziniz. Bu çizim dikdörtgenlerin kenar uzunlukları tam sayı olacak şekilde kaç farklı biçimde yapılabilir?

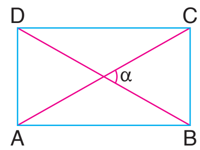
➢ Dikdörtgenin alanı ile kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

- Dikdörtgenin alan bağıntısını yazınız. Dikdörtgenin aynı zamanda bir paralelkenar olduğundan yola çıkarak dikdörtgen için farklı alan bağıntıları yazınız.

➢ Etkinlik basamaklarından çıkardığımız sonuçlara göre dikdörtgenlerin alanlarının nasıl bulunabileceğini açıklayınız.

Dikdörtgenin Alanı	ABCD dikdörtgeninin alanı; • $A(ABCD) = \|AD\| . \|AB\|$ • $A(ABCD) = \frac{1}{2} . \|AC\| . \|BD\| . \sin\alpha$ bağıntıları ile bulunabilir.

212. Şekil



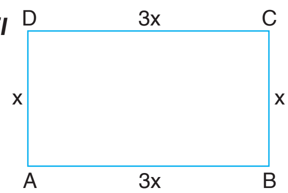
DİKKAT

Paralelkenar için verilen alan özellikleri dikdörtgen için de geçerlidir.

6. Örnek

Dikdörtgen şeklindeki bir fotoğraf çerçevesinin uzun kenarının uzunluğu, kısa kenarın uzunluğunun 3 katıdır. Bu çerçevenin alanı 27 cm^2 olduğuna göre fotoğraf çerçevesinin çevresinin kaç cm olduğunu bulalım.

213. Şekil



$|AD| = x$ ise $|AB| = 3x$ olur.

$A(ABCD) = x . 3x \Rightarrow 3x^2 = 27$

$\Rightarrow x^2 = 9$

$\Rightarrow x = 3$ cm olur.

$Çevre(ABCD) = 2.(x + 3x) = 8x = 8.3 = 24$ cm bulunur.

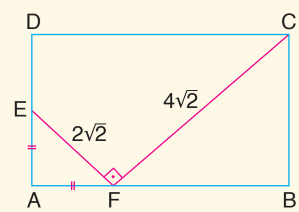
Sıra Sizde

Bir dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğu kısa kenarının uzunluğunun 2 katından 2 br fazladır. Bu dikdörtgenin alanı 12 br^2 olduğuna göre çevresinin kaç birim olduğunu bulunuz.

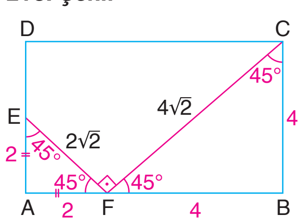
7. Örnek

"214. Şekil"deki ABCD dikdörtgeninde $|AF| = |EA|$, $[EF] \perp [FC]$, $|EF| = 2\sqrt{2}$ br, $|FC| = 4\sqrt{2}$ br ise ABCD dikdörtgeninin alanını bulalım.

214. Şekil



215. Şekil



$\overset{\frown}{EAF}$ ikizkenar üçgen olduğundan,

$m(\widehat{FEA}) = m(\widehat{EFA}) = 45°$ dir.

Bu durumda $m(\widehat{CFB}) = m(\widehat{BCF}) = 45°$ olur.

EAF ve CFB ikizkenar dik üçgenler olduğundan,

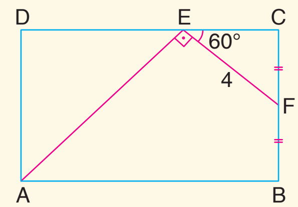
$|EA| = |AF| = 2$ br, $|FB| = |BC| = 4$ br olur.

$A(ABCD) = |AB| . |BC| = 6 . 4 = 24$ br^2 bulunur.

Sıra Sizde

"216. Şekil" deki ABCD dikdörtgeninde $[AE] \perp [EF]$, $|CF| = |FB|$, $|EF| = 4$ br, $m(\widehat{FEC}) = 60°$ dir. Buna göre ABCD dikdörtgeninin alanını bulunuz.

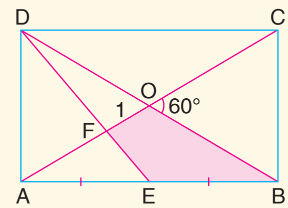
216. Şekil



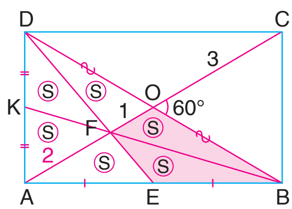
8. Örnek

"217. Şekil" deki ABCD dikdörtgeninde $|AE| = |EB|$, $|FO| = 1$ br, $m(\widehat{BOC}) = 60°$ ise A(EBOF) nın kaç br^2 olduğunu bulalım.

217. Şekil



218. Şekil



[AC] ve [BD] köşegenleri birbirine eş ve birbirini ortaladığından,

$|AC| = |BD|$ ve $|DO| = |OB|$ dir.

$\widehat{DAB}$ ninde O ve E noktaları bulundukları kenarların orta noktaları olduğundan [AO] ve [DE] kenarortay, F ise ağırlık merkezidir.

Bu durumda $|FA| = 2.|OF| = 2$ br $\Rightarrow$ $|AC| = |BD| = 6$ br olur.

$A(ABCD) = \frac{1}{2}.6.6.\sin 60° \Rightarrow A(ABCD) = 9\sqrt{3}$ br^2 bulunur.

$\widehat{DAB}$ nde [BK] kenarortayını çizelim. F noktası ağırlık merkezi olduğundan $\widehat{DAB}$ nin alanı 6 eş parçaya ayrılmış olur.

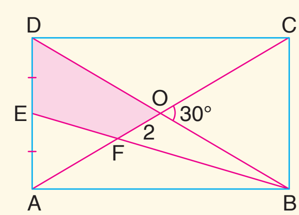
$A(ABCD) = 12S = 9\sqrt{3}$ br^2 $\Rightarrow$ $S = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ br^2 dir. O hâlde,

$A(EBOF) = 2S = 2.\frac{3}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ br^2 bulunur.

Sıra Sizde

"219. Şekil" deki ABCD dikdörtgeninde $|AE| = |ED|$, $|FO| = 2$ br, $m(\widehat{BOC}) = 30°$ ise A(EDOF) nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.

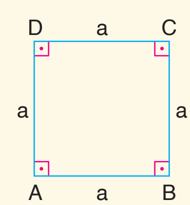
219 Şekil



Kare

Kare	Bütün kenar uzunlukları birbirine eşit olan dikdörtgene **kare** denir. Kare, dikdörtgen ve eşkenar dörtgenin bütün özelliklerini taşır.

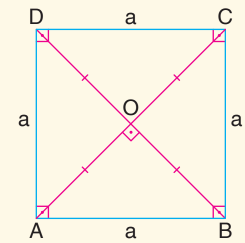
220. Şekil



9. Örnek

Karenin özelliklerini inceleyelim.

221. Şekil



a. Kare, kenarları birbirine dik olduğundan dikdörtgenin, kenar uzunlukları birbirine eşit olduğundan eşkenar dörtgenin tüm özelliklerini taşır.

- $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$
- $|AC| = |BD|$

b. Köşegenler birbirini dik ortalar.

- $|AO| = |OC| = |DO| = |OB|$
- $[AC] \perp [BD]$

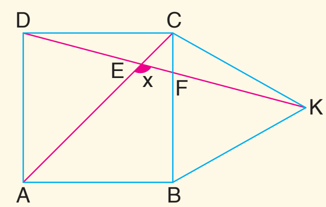
c. Köşegenler bulundukları açının açıortayıdır.

- $m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{OAD}) = 45°$
- $m(\widehat{ADO}) = m(\widehat{ODC}) = 45°$
- $m(\widehat{DCO}) = m(\widehat{OCB}) = 45°$
- $m(\widehat{CBO}) = m(\widehat{OBA}) = 45°$

10. Örnek

"222. Şekil" de ABCD kare, BCK eşkenar üçgen ve $[AC] \cap [DK] = \{E\}$ ise $m(\widehat{AEF}) = x$ in kaç derece olduğunu bulalım.

222. Şekil

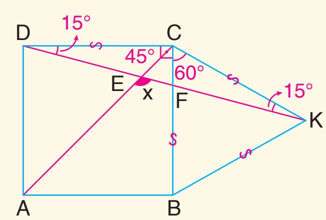


BCK eşkenar üçgen olduğundan $|BC| = |BK| = |CK|$ ve ABCD kare olduğundan $|BC| = |DC|$ dir.

Bu durumda DCK ikizkenar üçgen olur.

$$m(\widehat{CDK}) = m(\widehat{CKD}) = \frac{180° - (90° + 60°)}{2} = 15° \text{ dir.}$$

223. Şekil



Karede köşegen aynı zamanda açıortay olduğundan $m(\widehat{DCA}) = 45°$ dir

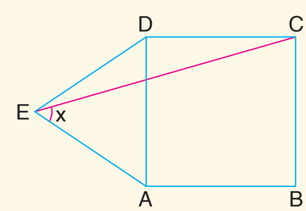
$\overset{\triangle}{DCE}$ nde $m(\widehat{CED}) = 180° - (15° + 45°) = 120°$ dir.

O hâlde $m(\widehat{AEF}) = 120°$ bulunur.

Sıra Sizde

"224. Şekil" deki ABCD kare, EAD eşkenar üçgendir. Buna göre $m(\widehat{CEA}) = x$ in kaç derece olduğunu bulunuz.

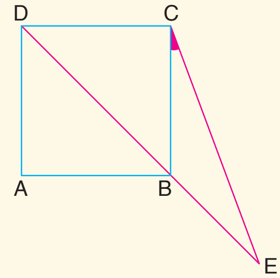
224. Şekil



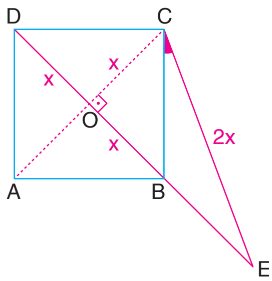
11. Örnek

"225. Şekil" deki ABCD karesinde $|DB| = |CE|$ olarak veriliyor. Buna göre $m(\widehat{BCE})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

225. Şekil



226. Şekil



$|DB| = |CE| = 2x$ olsun. $[AC]$ köşegenini çizelim. Buna göre $|AC| = |DB| = 2x$ olur.

COE dik üçgeninde hipotenüs uzunluğu $[OC]$ kenarının uzunluğunun iki katı olduğundan üçgen $30° - 60° - 90°$ üçgenidir.

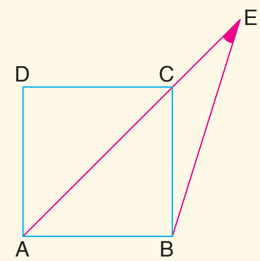
Buna göre $m(\widehat{OCE}) = 60°$ olur.

$$m(\widehat{BCE}) = m(\widehat{OCE}) - m(\widehat{OCB})$$
$$= 60° - 45° = 15° \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

"227. Şekil" deki ABCD karesinde $|AC| = |BE|$ ise $m(\widehat{AEB})$ nin kaç derece olduğunu bulunuz.

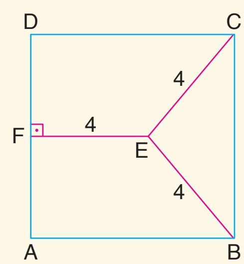
227. Şekil



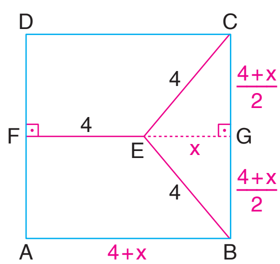
12. Örnek

"228. Şekil" deki ABCD karesinde $|EF| = |EC| = |EB| = 4$ br ve $[EF] \perp [AD]$ dir. Buna göre $|AB|$ nun kaç birim olduğunu bulalım.

228. Şekil



229. Şekil



$[EF]$ nı uzatalım. $[EG]$, EBC ikizkenar üçgeninin hem yüksekliği, hem de kenarortayı olur.

$|EG| = x$ olsun. Bu durumda,

$|FG| = |AB| = |BC| = 4 + x$ ve

$|CG| = |GB| = \dfrac{4+x}{2}$ olur.

EGC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

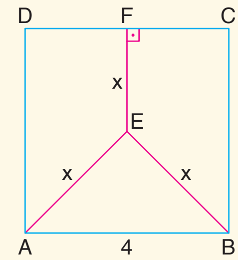
$$\left(\frac{4+x}{2}\right)^2 + x^2 = 4^2 \Rightarrow 16 + 8x + x^2 + 4x^2 = 64$$
$$\Rightarrow 5x^2 + 8x - 48 = 0$$
$$\Rightarrow (5x - 12).(x + 4) = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{12}{5} \text{ br olur.}$$

O hâlde $|AB| = 4 + \dfrac{12}{5} = \dfrac{32}{5}$ br bulunur.

Sıra Sizde

"230. Şekil" deki ABCD karesinde $|AB| = 4$ br, $|EF| = |EA| = |EB| = x$ br dir. Buna göre x in kaç birim olduğunu bulunuz.

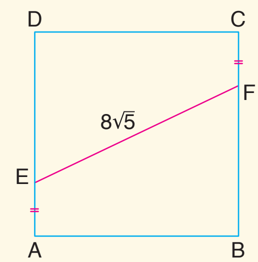
230. Şekil



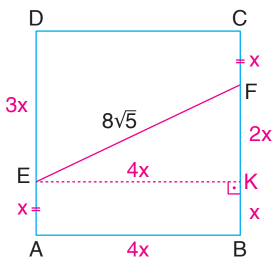
13. Örnek

"231. Şekil" deki ABCD karesinde $|EA| = |CF|$, $4|EA| = |AB|$ ve $|EF| = 8\sqrt{5}$ br ise $|BC|$ nu bulalım.

231. Şekil



232. Şekil



$[AB] // [EK]$ olacak biçimde $[EK]$ nı çizelim.

$|EA| = x$ ise $|AB| = |EK| = 4x$,

$|FK| = 2x$ olur.

FKE dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

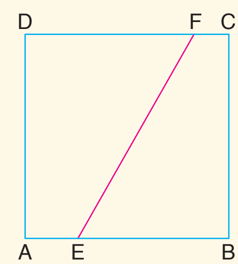
$$(2x)^2 + (4x)^2 = \left(8\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow 20x^2 = 320 \Rightarrow x = 4 \text{ olur.}$$

$|BC| = 4x \Rightarrow |BC| = 16$ br bulunur.

Sıra Sizde

"233. Şekil" deki ABCD karesinde $6|FC| = 3|EB| = 2|AB|$ ve $|EF| = 3\sqrt{5}$ br olduğuna göre $|AB|$ uzunluğunu bulunuz.

233. Şekil



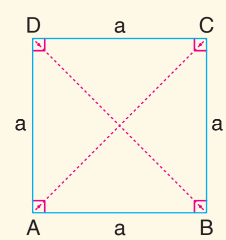
Karenin Alanı

ETKİNLİK

- "234. Şekil" de verilen bir kenar uzunluğu a br olan ABCD karesinde $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerinin uzunluklarını a cinsinden ifade ediniz.
- Karenin yüksekliğini belirleyiniz.
- Karenin aynı zamanda paralelkenar (veya dikdörtgen) olduğundan yola çıkarak ABCD karesinin alanını veren farklı bağıntılar yazınız.

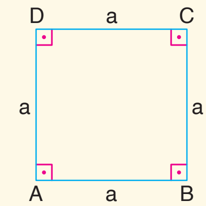
➢ Karenin alanı ile köşegen uzunlukları arasındaki ilişkiyi ve karenin alanı ile bir kenar uzunluğu arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

234. Şekil



Karenin Alanı	Kenar uzunluğu a br olan karenin alanı, $A(ABCD) = a^2\ br^2$ dir.

235. Şekil



14. Örnek

"236. Şekil" de kare şeklindeki bir banyo zeminine döşenen karesel fayanslar gösterilmiştir. Mavi fayansların kapladığı alan $64\ m^2$ ise fayans döşenen banyo zemininin çevresini bulalım.

Mavi fayansların bir kenar uzunluğu a br olsun.

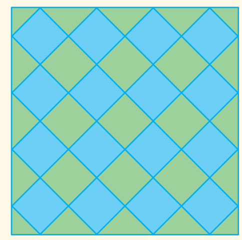
Mavi fayansların toplam alanı, $16a^2 = 64$

$a = 2$ m bulunur.

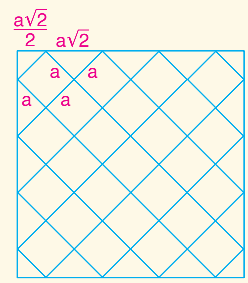
Banyo zeminin çevresi, $4.\left(\cancel{2}.\dfrac{2\sqrt{2}}{\cancel{2}}+3.2\sqrt{2}\right) = 4.8\sqrt{2}$

$= 32\sqrt{2}$ m dir.

236. Şekil



237. Şekil



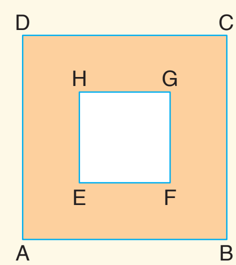
Sıra Sizde

"236. Şekil"deki yeşil fayansların kapladığı alanı bulunuz.

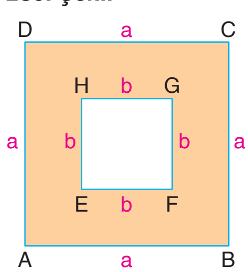
15. Örnek

"238. Şekil" deki ABCD ve EFGH birer kare $|AB| - |GH| = 5$ br, boyalı alan $55\ br^2$ ise ABCD karesinin alanını bulalım.

238. Şekil



239. Şekil



$|AB| = a$ ve $|GH| = b$ olsun.

$a - b = 5$ ve boyalı alan $a^2 - b^2 = 55$ ise,

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$55 = 5(a + b) \Rightarrow a + b = 11$ dir.

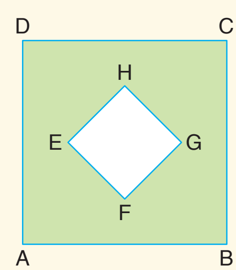
$\left.\begin{array}{l} a+b=11 \\ a-b=5 \end{array}\right\}$ $a = 8$ ve $b = 3$ bulunur.

O hâlde $A(ABCD) = 8^2 = 64\ br^2$ dir.

Sıra Sizde

"240. Şekil"deki ABCD ve EFGH birer kare, $|AB| - |EF| = 3$ br, boyalı alan $27\ br^2$ ise EFGH karesinin alanını bulunuz.

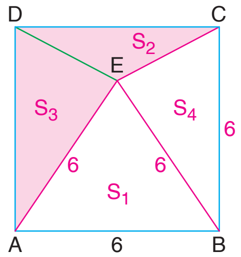
240. Şekil



16. Örnek

"241. Şekil" deki ABCD karesinde EAB eşkenar üçgen ve |AB| = 6 br ise boyalı bölgenin alanını bulalım.

242. Şekil



[DE] nı çizelim. ABCD karesi aynı zamanda dikdörtgen olduğundan,

$S_1 + S_2 = S_3 + S_4 = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ dir.

$S_1 = \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ br^2 ve $\widehat{AED} \cong \widehat{BEC}$ *(K.A.K eşliği)* olduğundan $S_3 = S_4$ olur.

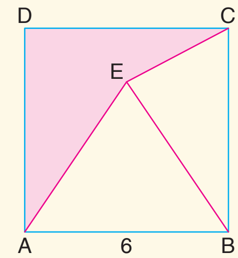
$A(ABCD) = 6.6 = 36$ br^2 ise,

$S_1 + S_2 = 18 \Rightarrow 9\sqrt{3} + S_2 = 18 \Rightarrow S_2 = (18 - 9\sqrt{3})$ br^2 dir.

$S_3 + S_4 = 18 \Rightarrow 2S_3 = 18 \Rightarrow S_3 = 9$ br^2 olur. O hâlde,

$S_2 + S_3 = 18 - 9\sqrt{3} + 9 = (27 - 9\sqrt{3})$ br^2 bulunur.

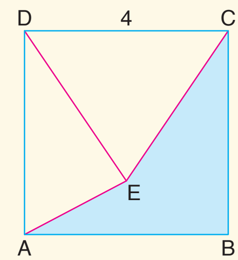
241. Şekil



Sıra Sizde

"243. Şekil" deki ABCD karesinde DEC eşkenar üçgen ve |DC| = 4 br ise boyalı bölgenin alanını bulunuz.

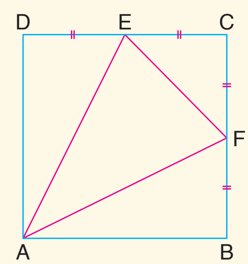
243. Şekil



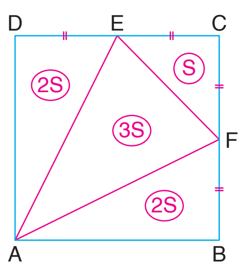
17. Örnek

"244. Şekil" deki ABCD karesinin alanı 32 br^2 dir. |DE| = |EC| ve |CF| = |FB| olduğuna göre AEF üçgenin alanını bulalım.

244. Şekil



245. Şekil



ABCD karesinde verilen bölgelerin alanları arasında "245. Şekil" deki ilişki vardır.

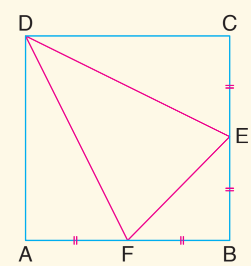
$A(ABCD) = 8.S = 32 \Rightarrow S = 4$ br^2 dir.

$A(\widehat{AEF}) = 3.S = 3.4 = 12$ br^2 bulunur.

Sıra Sizde

"246. Şekil" deki ABCD karesinin alanı 30 br^2, |CE| = |EB| ve |AF| = |FB| olduğuna göre AFD üçgeninin alanını bulunuz.

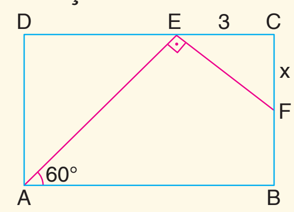
246. Şekil



ALIŞTIRMALAR

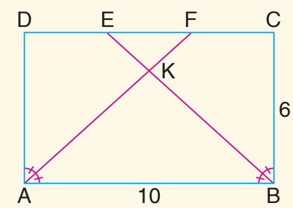
1. "247. Şekil" deki ABCD dikdörtgeninde $|EC| = 3$ br, $[AE] \perp [EF]$ ve $m(\widehat{BAE}) = 60°$ ise $|CF| = x$ kaç br dir?

247. Şekil



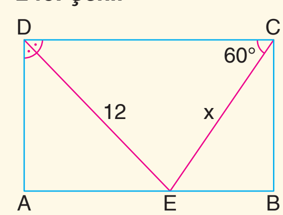
2. "248. Şekil" deki ABCD dikdörtgeninde $[AF]$ ve $[EB]$ açıortay, $|CB| = 6$ br ve $|AB| = 10$ br dir. Buna göre $\dfrac{|EK|}{|KB|}$ oranını bulunuz.

248. Şekil



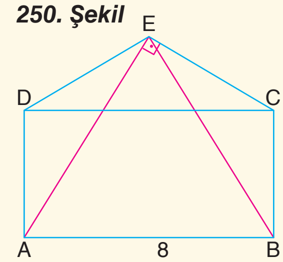
3. "249. Şekil" deki ABCD dikdörtgeninde $[DE]$ açıortay, $|DE| = 12$ br ve $m(\widehat{ECD}) = 60°$ ise $|CE| = x$ kaç br dir?

249. Şekil



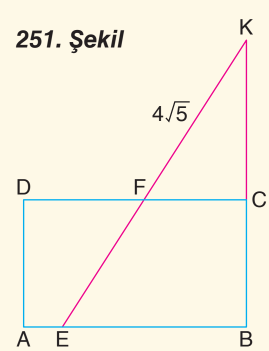
4. "250. Şekil" deki ABCD dikdörtgeninde $[AE] \perp [EC]$, $|DE|^2 + |EB|^2 = 100\ cm^2$ ve $|AB| = 8$ cm ise $|BC|$ kaç cm dir?

250. Şekil



5. "251. Şekil" deki ABCD dikdörtgen, FCK dik üçgen, $|DF| = |FC|$, $|KC| = 2|CF|$, $|CF| = 2|BC|$, $|FK| = 4\sqrt{5}$ cm ise $|AE|$ kaç cm dir?

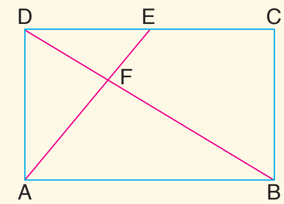
251. Şekil



6. Köşegen uzunlukları 13 br, çevre uzunluğu 34 br olan dikdörtgenin alanını bulunuz.

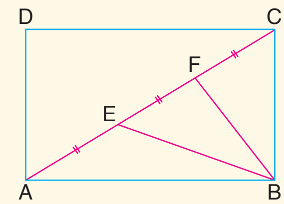
7. "252. Şekil"deki ABCD dikdörtgeninde $A(\widehat{DEF}) = 2\ br^2$ ve $A(\widehat{AFB}) = 8\ br^2$ ise $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?

252. Şekil



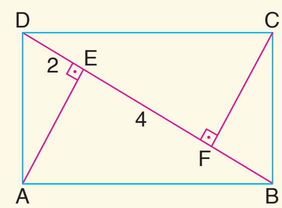
8. "253. Şekil"deki ABCD dikdörtgeninde [AC] köşegen, $|AE| = |EF| = |FC|$ ve $A(\widehat{AEB}) = 4\ br^2$ ise $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?

253. Şekil



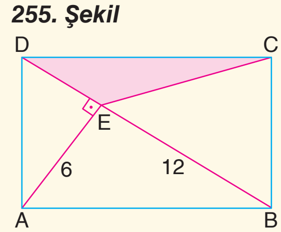
9. "254. Şekil"deki ABCD dikdörtgeninde $|DE| = 2$ br, $|EF| = 4$ br, $[AE] \perp [DB]$ ve $[CF] \perp [DB]$ dir. Buna göre ABCD dikdörtgeninin alanı kaç br^2 dir?

254. Şekil



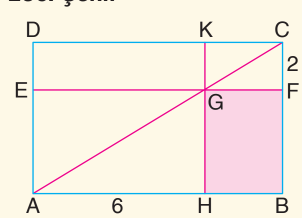
10. "255. Şekil"deki ABCD dikdörtgeninde [DB] köşegen, $[AE] \perp [DB]$, $|AE| = 6$ br ve $|EB| = 12$ br dir. Buna göre $A(\widehat{DEC})$ kaç br^2 dir?

255. Şekil



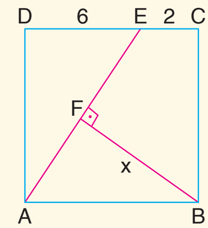
11. "256. Şekil"deki ABCD dikdörtgeninde $[AB] // [EF]$, $[KH] // [BC]$, $[AC] \cap [KH] = \{G\}$, $|CF| = 2$ br ve $|AH| = 6$ br ise BFGH dikdörtgeninin alanını bulunuz.

256. Şekil



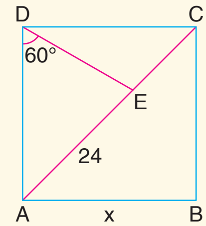
12. “257. Şekil”deki ABCD karesinde $[BF] \perp [AE]$, $|EC| = 2$ br, $|DE| = 6$ br ise $|BF| = x$ kaç br dir?

257. Şekil



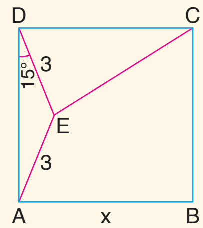
13. “258. Şekil”deki ABCD karesinde $[AC]$ köşegen,ve $|AE| = 24$ br ise $|AB| = x$ kaç br dir?

258. Şekil



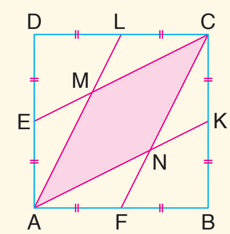
14. “259. Şekil”deki ABCD karesinde $|DE| = |EA| = 3$ br ve $m(\widehat{ADE}) = 15°$ ise $|AB| = x$ kaç br dir?

259. Şekil



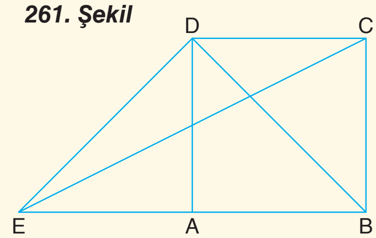
15. “260. Şekil”deki ABCD karesinde E, F, K ve L bulundukları kenarların orta noktalarıdır. $|AB| = 12$ br ise $A(ANCM)$ kaç br^2 dir?

260. Şekil



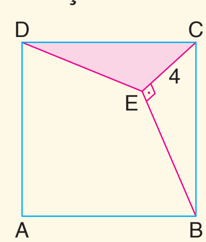
16. “261. Şekil”deki ABCD karesinde $E \in [BA$, $A(\widehat{DEC}) = 64$ br^2 ise $|DB|$ kaç br dir?

261. Şekil



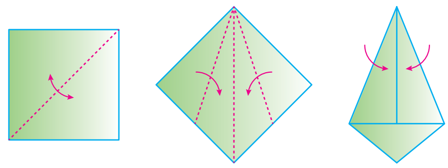
17. “262. Şekil”deki ABCD karesinde $[CE] \perp [EB]$ ve $|EC| = 4$ br dir. Buna göre $A(\widehat{DEC})$ kaç br^2 dir?

262. Şekil



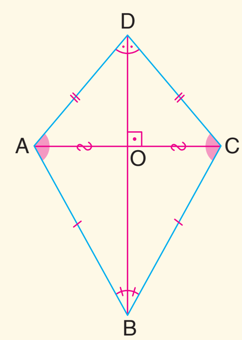
Deltoid

Kare şeklindeki bir kâğıda I ve II. şekillerde gösterilen katlamalar yapılarak III teki şekil elde ediliyor. Bu şeklin özellikleri neler olabilir?



Deltoid	Aynı tabanlı iki ikizkenar üçgenin tabanlarının birleştirilmesiyle oluşan dörtgene **deltoid** denir. Kare ve eşkenar dörtgen birer deltoiddir. ABCD deltoidinde; • [AC] ortak taban, • [AC] simetri ekseni, • $\lvert AD\rvert = \lvert DC\rvert$, • $\lvert AB\rvert = \lvert BC\rvert$, • $[AC] \perp [BD]$ • $\lvert AO\rvert = \lvert OC\rvert$ • $m(\widehat{ADO}) = m(\widehat{ODC})$ • $m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{OBC})$ • $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DCB})$ dir.

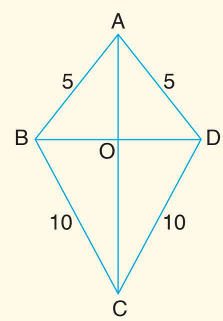
263. Şekil



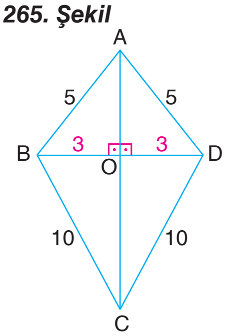
1. Örnek

"264. Şekil" de verilen ABCD deltoidinde $\lvert AB\rvert = \lvert AD\rvert = 5$ br, $\lvert BC\rvert = \lvert DC\rvert = 10$ br ve $\lvert BD\rvert = 6$ br dir. Buna göre $\lvert AC\rvert$ nu bulalım.

264. Şekil



265. Şekil



$\lvert BD\rvert = 6$ br ise $\lvert BO\rvert = \lvert OD\rvert = 3$ br dir.

$[AC] \perp [BD]$ olduğundan ABO ve BOC üçgenlerinde Pisagor teoremini uygulayabiliriz.

$\lvert AO\rvert^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow \lvert AO\rvert = 4$ br dir.

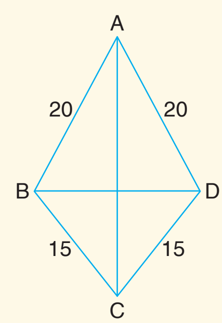
$\lvert OC\rvert^2 = 10^2 - 3^2 \Rightarrow \lvert OC\rvert = \sqrt{91}$ br dir.

O hâlde $\lvert AC\rvert = 4 + \sqrt{91}$ br bulunur.

Sıra Sizde

"266. Şekil"deki ABCD deltoidinde $\lvert AB\rvert = \lvert AD\rvert = 20$ br, $\lvert BC\rvert = \lvert CD\rvert = 15$ br ve $\lvert BD\rvert = 24$ br dir. Verilenlere göre $\lvert AC\rvert$ nu bulunuz.

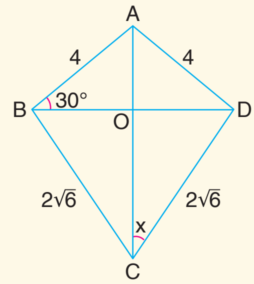
266. Şekil



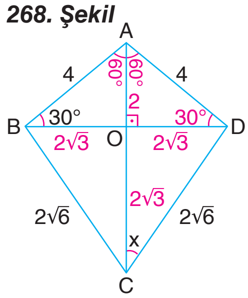
2. Örnek

“267. Şekil” de verilen ABCD deltoidinde $|AB| = |AD| = 4$ br, $|BC| = |CD| = 2\sqrt{6}$ br, $m(\widehat{ABD}) = 30°$ ise $m(\widehat{ACD}) = x$ değerini bulalım.

267. Şekil



268. Şekil



ABO üçgeni 30° - 60° - 90° üçgeni olduğundan,

$|AO| = 2$ br, $|BO| = |OD| = 2\sqrt{3}$ br olur.

DOC dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

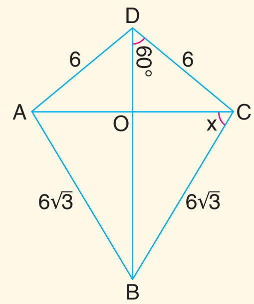
$|OC|^2 = (2\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{3})^2$

$|OC|^2 = 12 \Rightarrow |OC| = 2\sqrt{3}$ br dir. O hâlde BOC ikizkenar dik üçgeninde $m(\widehat{ACD}) = x = 45°$ bulunur.

Sıra Sizde

“269. Şekil” de verilen ABCD deltoidinde $|AB| = |BC| = 6\sqrt{3}$ br, $|AD| = |DC| = 6$ br ve $m(\widehat{BDC}) = 60°$ ise $m(\widehat{ACB}) = x$ değerini bulunuz.

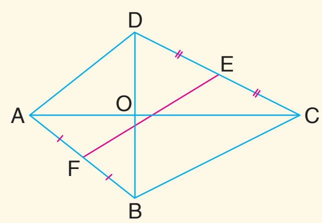
269. Şekil



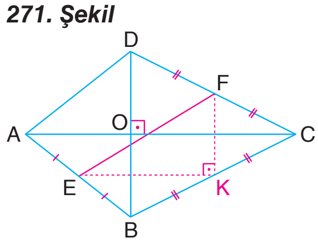
3. Örnek

“270. Şekil” deki ABCD deltoidinde E ve F bulundukları kenarların orta noktaları, $|AC| = 16$ br, $|BD| = 10$ br, $|DC| = |BC|$ ve $|AD| = |AB|$ dir. Buna göre $|EF|$ nu bulalım.

270. Şekil



271. Şekil



K noktası [BC] nın orta noktası olacak şekilde [EK] ve [FK] larını çizelim.

[EK] // [AC] ve [FK] // [DB] olduğundan [EK] ⊥ [FK] dır.

Ayrıca $|EK| = \dfrac{|AC|}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$ br,

$|FK| = \dfrac{|DB|}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ br dir.

EFK dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$|EF|^2 = |EK|^2 + |FK|^2 \Rightarrow |EF|^2 = 8^2 + 5^2$

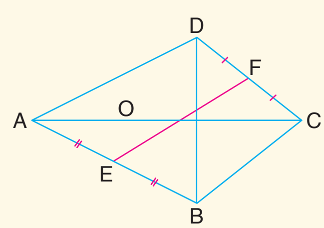
$\Rightarrow |EF|^2 = 89$

$\Rightarrow |EF| = \sqrt{89}$ br bulunur.

Sıra Sizde

“272. Şekil” deki ABCD deltoidinde E ve F bulundukları kenarların orta noktaları, $|AC| = 8$ br, $|BD| = 6$ br, $|DC| = |BC|$ ve $|AD| = |AB|$ dir. Buna göre $|EF|$ nu bulunuz.

272. Şekil



Deltoidin Alanı

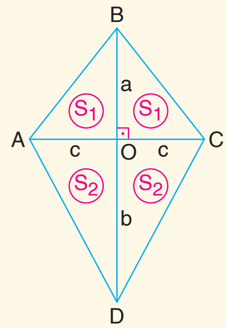
ETKİNLİK

- "273. Şekil"deki ABCD deltoidinde, $|BO| = a$, $|OD| = b$, $|AO| = |OC| = c$ olsun.

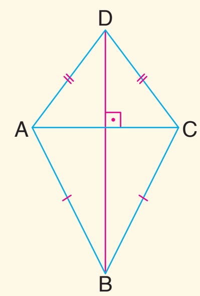
  $A(\widehat{AOB}) = A(\widehat{BOC}) = S_1$, $A(\widehat{AOD}) = A(\widehat{DOC}) = S_2$ olmak üzere S_1 ve S_2 alanlarını bularak ABCD deltoidinin alanını köşegenlerinin uzunlukları cinsinden ifade ediniz.

➢ Aynı ifade köşegenlerinin uzunlukları ve köşegenler arasındaki açı kullanılarak nasıl elde edilebilir? Tartışınız.

273. Şekil



274. Şekil

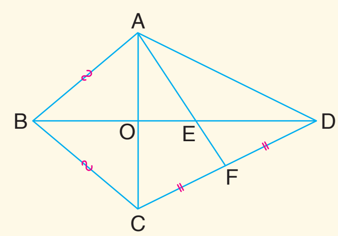


Deltoidin Alanı	Deltoidin alanı, köşegen uzunluklarının çarpımının yarısına eşittir. $A(ABCD) = \dfrac{|AC|.|BD|}{2}$

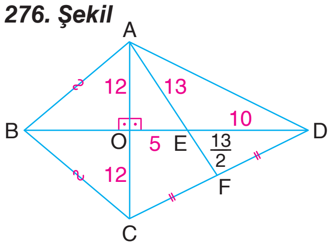
4. Örnek

"275. Şekil"deki ABCD deltoidinde $|AB| = |BC|$, $|AD| = |DC|$, $|CF| = |FD|$, $|AC| = 24$ br, $|EF| = \frac{13}{2}$ br ve $|OD| = 2|OB|$ dir. Verilenlere göre ABCD deltoidinin alanını bulalım.

275. Şekil



276. Şekil



$\widehat{ACD}$ nde $[AF]$ ve $[OD]$ kenarortay olduğundan E ağırlık merkezi olur.

Buna göre $|EF| = \frac{13}{2}$ br ise

$|AE| = 2.|EF| = 13$ br dir.

$\widehat{AOE}$ inde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$12^2 + |OE|^2 = 13^2 \Rightarrow |OE| = 5$ br ve $|ED| = 10$ br bulunur.

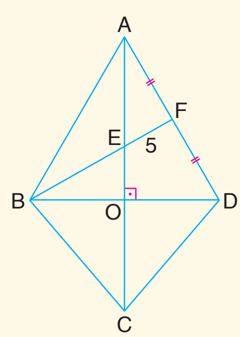
$|OD| = 2|OB| \Rightarrow |OB| = \frac{15}{2} \Rightarrow |BD| = 15 + \frac{15}{2} = \frac{45}{2}$ br dir.

$A(ABCD) = \dfrac{|AC|.|BD|}{2} \Rightarrow A(ABCD) = \dfrac{24.\frac{45}{2}}{2} = 270$ br^2 bulunur.

Sıra Sizde

"277. Şekil"deki ABCD deltoidinde $|EF| = 5$ br, $|BD| = 12$ br, $|AO| = 3|OC|$, $|AF| = |FD|$, $|BC| = |CD|$ ve $|AB| = |AD|$ olarak veriliyor. Buna göre ABCD deltoidinin alanını bulunuz.

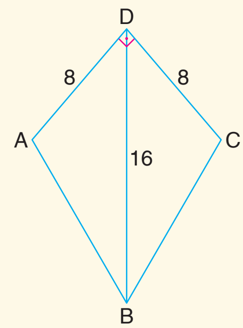
277. Şekil



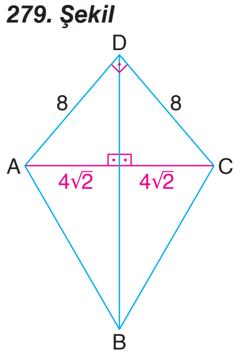
5. Örnek

"278. Şekil"de verilen ABCD deltoidinde [AD] ⊥ [DC], |DB| = 16 br ve |AD| = |DC| = 8 br olduğuna göre A(ABCD) nın kaç br^2 olduğunu bulalım.

278. Şekil



279. Şekil



[AC] köşegenini çizelim.

ADC ikizkenar dik üçgen olduğundan

$|AC| = 8\sqrt{2}$ br olur.

$$A(ABCD) = \frac{|AC|.|BD|}{2}$$

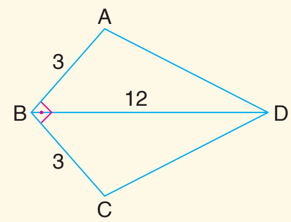
$$= \frac{8\sqrt{2}.16}{2}$$

$= 64\sqrt{2}$ br^2 bulunur.

Sıra Sizde

"280. Şekil"deki ABCD deltoidinde [AB] ⊥ [BC], |BD| = 12 br ve |AB| = |BC| = 3 br dir. Buna göre A(ABCD) nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.

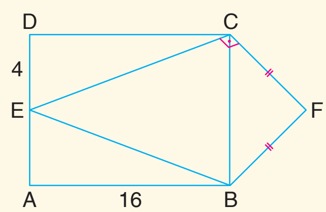
280. Şekil



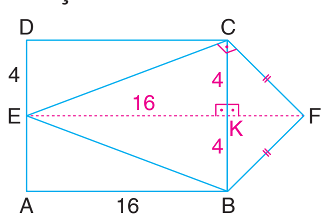
6. Örnek

"281. Şekil"de ABCD dikdörtgen, EBFC deltoid, [EC] ⊥ [CF], |AB| = 16 br, |ED| = 4 br ve |CF| = |FB| ise EBFC deltoidinin alanını bulalım.

281. Şekil



282. Şekil



[EF] köşegenini çizelim. [EF] ⊥ [CB], |CK| = |KB| = |ED| = 4 br,

|EK| = |AB| = 16 br olur.

ECF dik üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa,

$4^2 = 16.|KF| \Rightarrow |KF| = 1$ br olur.

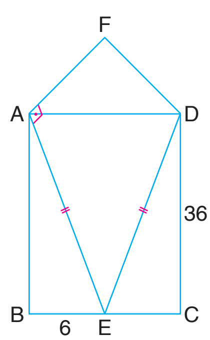
$$A(EBFC) = \frac{17.8}{2} = 68\,br^2$$ bulunur.

Sıra Sizde

"283. Şekil"de ABCD dikdörtgen, EDFA deltoid, [EA] ⊥ [AF],

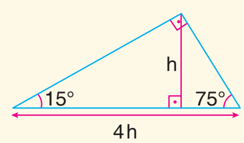
|BE| = 6 br, |DC| = 36 br ve |AE| = |ED| dir. Verilenlere göre EDFA deltoidinin alanını bulunuz.

283. Şekil



DİKKAT

15° - 75° - 90° üçgeninde hipotenüse ait yükseklik hipotenüs uzunluğunun $\frac{1}{4}$ idir.



7. Örnek

"284. Şekil" deki ABCD deltoidinde $m(\widehat{ADO}) = 75°$, $m(\widehat{CBO}) = 15°$, $|AD| = |DC|$ ve $|AO| = |OC| = 3$ br dir. Buna göre ABCD deltoidinin alanını bulalım.

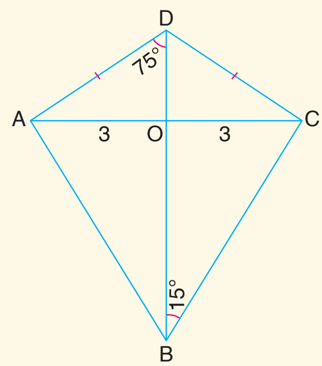
Deltoidde köşegenler aynı zamanda açıortay da olduklarından,
$m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{ABD}) = 15°$ dir. Bu durumda BAD üçgeni 15° - 75° - 90° üçgeni olur. 15° - 75° - 90° üçgenlerinde hipotenüs uzunluğu hipotenüse ait yüksekliğin 4 katı olacağından,

$|AO| = 3$ br $\Rightarrow$ $|BD| = 12$ br dir.

Ayrıca $|AO| = |OC| = 3$ br $\Rightarrow$ $|AC| = 6$ br dir. O hâlde,

$$A(ABCD) = \frac{|AC|.|BD|}{2} \Rightarrow A(ABCD) = \frac{6.12}{2} = 36 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

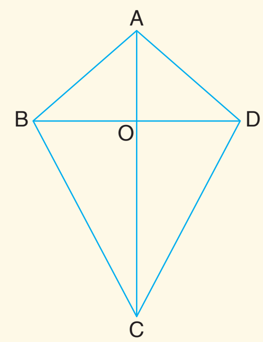
284. Şekil



Sıra Sizde

"285. Şekil" deki ABCD deltoidinde $|AB| = |AD|$, $|BC| = |CD|$, $m(\widehat{BAD}) = 150°$ ve $m(\widehat{DCB}) = 30°$ dir. $|BD| = 12$ br ise $A(ABCD)$ nın kaç br^2 olduğunu bulunuz.

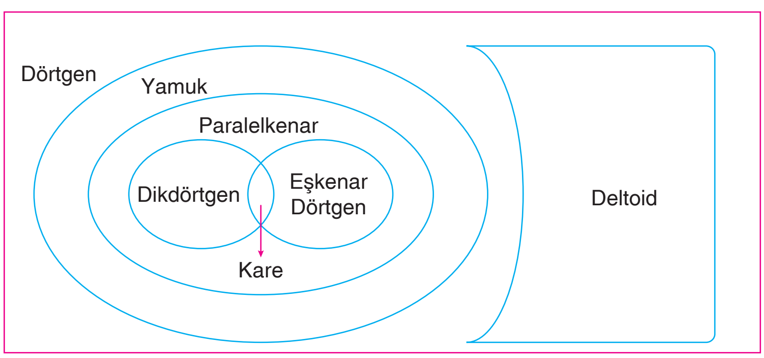
285. Şekil



9. Örnek

Yamuk, paralelkenar, dikdörtgen, kare, eşkenar dörtgen ve deltoid arasındaki ilişkiyi belirten bir şema oluşturalım.

286. Şekil



- Dörtgenler en az iki kenarı paralel olanlar ve olmayanlar şeklinde gruplandırıldığında yamuk ve deltoid ayrık iki küme belirtir.
- Bir çift kenarı paralel olan dörtgenler yamuk olarak adlandırıldığından paralelkenar aynı zamanda bir yamuktur.

PROJE

203. sayfadaki projede "Projenin Sunum Süreci" ni tamamlayarak projeyi sunuma hazır hâle getirebilirsiniz.

- Dikdörtgen, kare ve eşkenar dörtgenin karşılıklı kenarları paralel olduğundan bu dörtgenler paralelkenardır.
- Paralelkenar tüm iç açılarının 90° olması hâlinde dikdörtgen; dikdörtgen ise tüm kenar uzunluklarının eşit olması durumunda kare adını alır. Paralelkenar tüm kenar uzunluklarının eşit olması durumunda ise eşkenar dörtgen olarak adlandırılır. Kare, hem dikdörtgen hem de eşkenar dörtgen olan bir paralelkenar olduğundan dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve paralelkenarın tüm özelliklerini taşır.

Dörtgenlerin Alanları İle İlgili Problemler

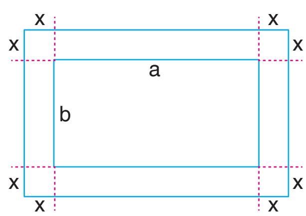
10. Örnek

"287. Şekil" deki ahşap çerçevenin dış çevresi 200 cm, iç çevresi 160 cm dir. Bu çerçeve için kullanılan malzemenin ön yüzünün alanını bulalım.

287. Şekil

Çerçevenin çizgi modelini "288. Şekil" deki gibi oluşturabiliriz. Çerçevenin dış ve iç kısımlarının çevresi,

288. Şekil



$2(2x + a) + 2.(2x + b) = 200$ ... **(I)**

$2(a + b) = 160$ ... **(II)** olur.

I eşitliğini düzenlersek,

$8x + 2(a + b) = 200$

$8x + 160 = 200$

$x = 5$ cm olur.

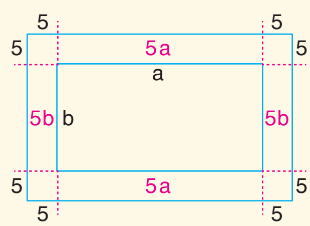
Çerçeve için kullanılan malzemenin alanı,

$2.(5.a + 5.b) + 4.5.5 = 10(a + b) + 100$

$= 10.80 + 100$ *(**II** eşitliğinden a + b = 80 dir.)*

$= 900$ cm^2 bulunur.

289. Şekil



Sıra Sizde

"10. Örnek" teki çerçevenin dış çevresinin 380 cm, iç çevresinin de 300 cm olduğunu düşünerek çerçevenin ön yüzü için kullanılan malzemenin alanını bulunuz.

11. Örnek

"290. Şekil" deki dört yüzü birbirine eş yamuktan oluşan çöp kovasının dış yüzü ve tabanı metal kaplanacaktır. Bu iş için kaç cm^2 malzeme kullanılacağını bulalım.

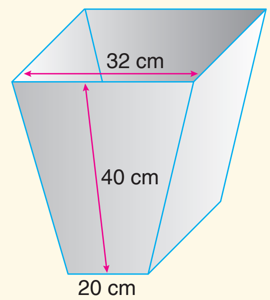
Kutunun yan yüzlerinden birinin alanı, $\dfrac{(20+32).40}{2} = 52.20 = 1040\ cm^2$

olup 4 yan yüzenin alanı $4.1040 = 4160\ cm^2$ dir.

Kutunun tabanını alanı, $20.20 = 400\ cm^2$ olur.

Kaplama için toplam $4160 + 400 = 4560\ cm^2$ malzeme kullanılır.

290. Şekil



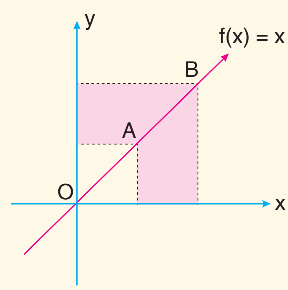
Sıra Sizde

" 290. Şekil" deki çöp kovasının verilen ölçülerinin $\dfrac{3}{4}$ oranında küçültülmesiyle elde edilecek çöp kovasının dış yüzünün ve tabanının metal kaplanması durumunda kaç cm^2 malzeme gerekir?

12. Örnek

"291. Şekil" de $f(x) = x$ doğrusal fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Grafikte pembe boyalı alan $24\ br^2$ ve $|AB| = 4\sqrt{2}$ br ise A noktasının koordinatlarını bulalım.

291. Şekil



$A(a, a)$ ve $B(b, b)$ olsun. O hâlde $|OB| = b\sqrt{2}$ br ve $|OA| = a\sqrt{2}$ br olur.

$|AB| = |OB| - |OA|$ olduğundan $4\sqrt{2} = b\sqrt{2} - a\sqrt{2}$

$4\sqrt{2} = (b-a)\sqrt{2} \Rightarrow b - a = 4$ br dir. ... **(I)**

Boyalı bölge iki eş dik yamuktan oluştuğundan,

$\not{2}.\dfrac{(b+a)(b-a)}{\not{2}} = 24 \Rightarrow (b+a)(b-a) = 24$

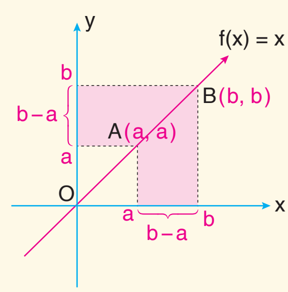
$(b+a).4 = 24$ *(I eşitliğinden)*

$b + a = 6$ br olur.

$\left.\begin{matrix} b+a=6 \\ b-a=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b = 5$ ve $a = 1$ dir.

O hâlde A noktasının koordinatları $(1, 1)$ bulunur.

292. Şekil



Sıra Sizde

"291. Şekil" deki boyalı alanın $48\ br^2$ ve $|AB| = 8\sqrt{2}$ br olması durumunda A noktasının koordinatlarını bulunuz.

13. Örnek

Bir ABCD deltoidinin simetri ekseni f(x) = x – 4 doğrusal fonksiyonunun grafiğinin üzerinde, [CD] kenarı ise $g(x)=\dfrac{x+2}{2}$ doğrusal fonksiyonunun grafiğinin üzerindedir. Deltoidin A ve B köşeleri de x ekseni üzerinde olduğuna göre bu deltoidin alanını bulalım.

Verilenleri koordinat sisteminde gösterelim. f(x) = x – 4 fonksiyonunun grafiği x eksenini (4, 0) da keser. Bu nokta deltoidin A köşesinin koordinatlarıdır.

f(x) = x – 4 fonksiyonunun grafiği deltoidin simetri ekseni olduğundan [DA] ⊥ [AB] ve dolayısıyla D ile A noktalarının apsisi aynı olur.

D köşesi $g(x)=\dfrac{x+2}{2}$ fonksiyonunun grafiğinin üzerinde ise x = 4 için y = 3 olduğundan bu köşenin koordinatları (4, 3) tür.

$g(x)=\dfrac{x+2}{2}$ ve f(x) = x – 4 fonksiyonlarının ortak çözümü C noktasının koordinatlarını verir. C(10, 6) dır.

B(m, 0) olsun. |AD| = |AB| ve m > 3 olduğundan,

$m - 4 = 3 \Rightarrow m = 7$ dir.

|AC| ve |BD| nu bulalım.

AEC üçgeni ikizkenar dik üçgen olduğundan,

$|AC| = \sqrt{2}\,.\,|AE| \Rightarrow |AC| = 6\sqrt{2}$ br ve

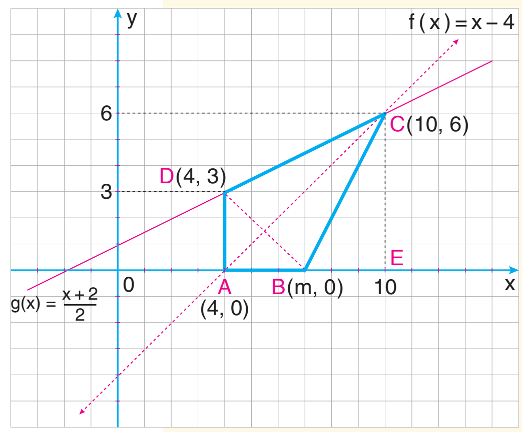
BAD üçgeni de ikizkenar dik üçgen olduğundan,

$|BD| = \sqrt{2}\,.\,|AB| \Rightarrow |BD| = 3\sqrt{2}$ br dir.

O hâlde,

$A(ABCD) = \dfrac{|AC|.|BD|}{2}=\dfrac{6\sqrt{2}.3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{18.2}{2}=18\,br^2$ bulunur.

293. Şekil

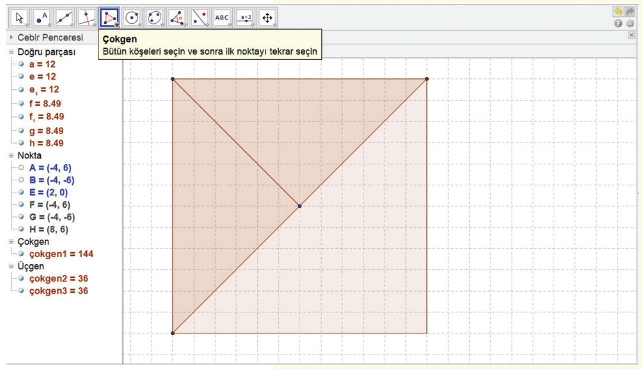


14. Örnek

Taş, kemik, plastik veya tahtadan yapılmış büyük bir karenin geometrik biçimlerdeki yedi adet parçaya ayrılarak oluşturulduğu tangramın bilinen en eski örneği 18. yy dan günümüze ulaşmıştır. Parçalarını bir araya getirerek çeşitli formlar oluşturma esasına dayalı bir zeka oyunu olan tangramı dinamik geometri yazılımında oluşturup her bir parçasının alanını bulup bütüne oranla ne kadar yer kapladıklarını bulalım.

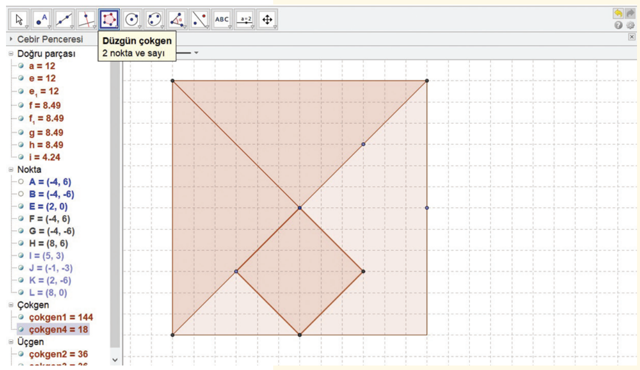
Dinamik geometri yazılımında boş bir çalışma sayfası açıp araç çubuğundaki "Çokgen" butonunu tıklayıp açılan "Düzgün çokgen" sekmesini seçip kenar uzunluğu 12 br olan bir kare çizelim. Daha sonra karenin merkezine "Nokta" butonunu seçerek bir nokta yerleştirelim. "Çokgen" butonunu tıklayıp ilk karenin içerisine "294. Şekil" deki gibi iki eş dik üçgen çizelim.

294. Şekil



Sonra karenin yarısını oluşturan alttaki açık renkli dik üçgende "Nokta" butonunu seçerek dik kenarların orta noktalarını ve karenin köşegenini 4 eş parçaya ayıracak iki nokta daha işaretleyelim. Daha sonra araç çubuğundaki "Çokgen" butonu tıklayıp açılan "Düzgün çokgen" sekmesini seçtikten sonra karenin merkezini ve köşegen üzerinde olan alttaki noktayı seçerek "295. Şekil" deki gibi bir kare oluşturalım.

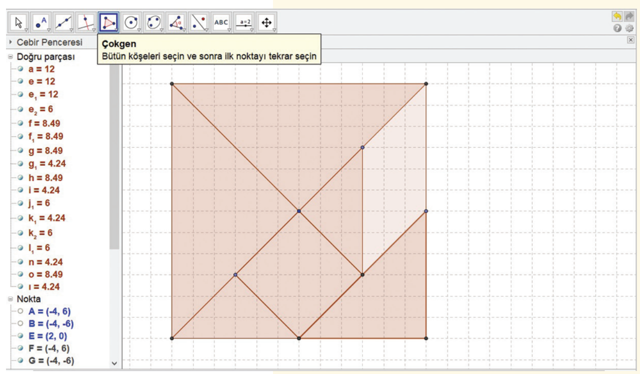
295. Şekil



Şimdi "Çokgen" butonunu tıklayıp son adımda çizdiğimiz karenin iki kenarını dik kenar kabul eden ikizkenar dik üçgenleri ve karenin sağ alt köşesi ile iki kenar orta noktasını seçip "296. Şekil" deki gibi bir dik üçgen daha oluşturalım.

Son olarak "Çokgen" butonunu tıklayıp açık renkli bölgede kalan paralelkenarı çizelim ve "Açı" butonunun altında açılan "Alan" kısmına tıklayıp her bir geometrik şeklin alanını belirleyelim.

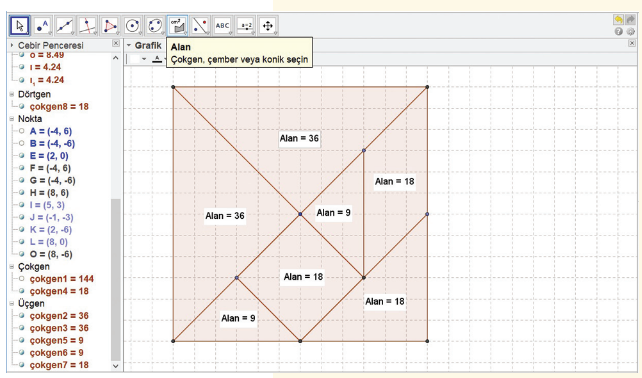
296. Şekil



Oluşturduğumuz tangram ve tangramı oluşturan her bir geometrik şeklin alanı "297. Şekil" deki gibidir.

Bu durumda küçük dik üçgenlerin alanının bütüne oranı $\frac{1}{16}$; ortanca dik üçgen, küçük kare ve paralelkenarın alanının bütüne oranı $\frac{1}{8}$ ve büyük dik üçgenlerin alanının bütüne oranı da $\frac{1}{4}$ bulunur.

297. Şekil



14. Örnek

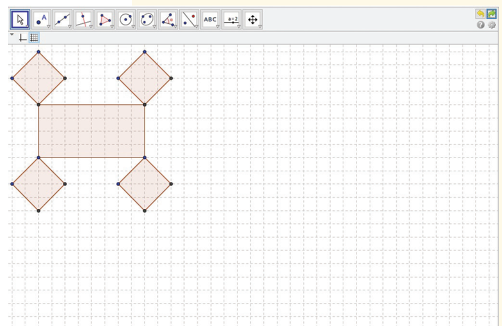
İnsanlığa daima iyiyi, doğruyu ve adil olmayı öğretmeyi amaçlayan hoşgörü dini İslâm'da sanat, İslam kültürünün büyük bir bölümünü oluşturur. Bu sanatlar, çok ince işlenip oluşturulan küçük boyutlu minyatürler ve yazıyı temel alan güzel sanat türü olan hat sanatıdır. Hat sanatında gelişmiş birçok tarz ve stil olmasına rağmen, dekoratif bir sanat olan tezhip hat sanatıyla birlikte anılır olmuştur.

298. Şekil

Kur'an nüshalarının oluşturulmasında hat ile birlikte dekoratif ve estetik açıdan önemli bir yere sahip olan tezhip sanatında "298. Şekil" deki gibi geometrik desenler de kullanılmaktadır. İçinde kare, dikdörtgen ve yamukların bulunduğu bu çalışmayı dinamik geometri yazılımında oluşturup içindeki motiflerin alanlarını bulalım.

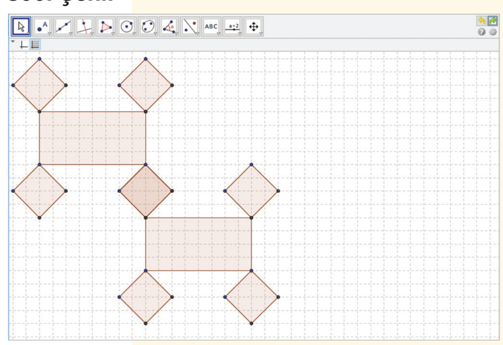
Dinamik geometri yazılımında boş bir çalışma sayfası açıp araç çubuğundaki "Çokgen" butonunu tıklayıp kısa kenar uzunluğu 4 br ve uzun kenar uzunluğu 8 br olan bir dördörtgen çizelim. Daha sonra "Çokgen" butonunun altında açılan "Düzgün çokgen" kısmına tıklayıp "299. Şekil" deki gibi dikdörtgenin her bir köşesine köşegen uzunlukları 4 br olan kareler çizelim.

299. Şekil



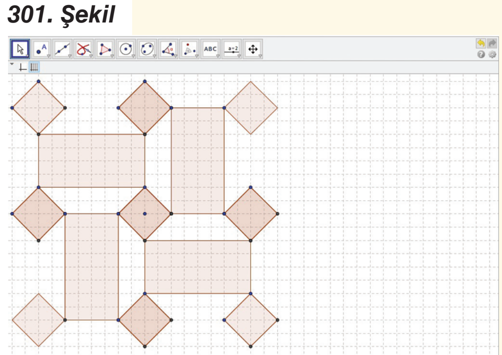
Daha sonra Ctrl+A komutuyla çizdiğimiz tüm şekli seçip Ctrl+C komutuyla kopyalayıp Ctrl+V komutuyla da "300. Şekil" deki gibi yapıştıracağımız şeklin üst sol karesini eski şeklin sağ alt karesiyle çakışacak şekilde yerleştirelim.

300. Şekil



Çakıştırdığımız karelerin merkezine "Nokta" butonunu seçerek bir nokta belirleyelim. Ctrl+A komutuyla tüm şekli seçelim. Daha sonra araç çubuğundaki "Doğruda yansıt" butonunun altında açılan "Nesneyi nokta etrafında döndür" ü tıkladıktan sonra belirlediğimiz noktayı seçelim. Açılan pencerede dönme açısını 90° seçip seçimi onaylayalım. Bu durumda "301. Şekil" elde edilir.

301. Şekil

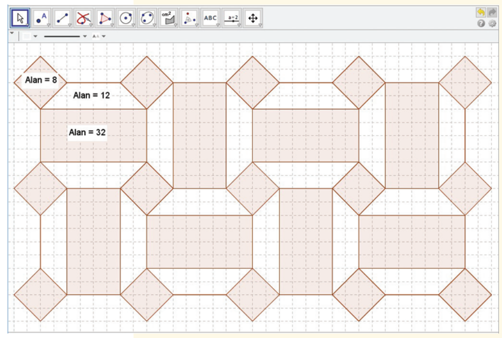


Sonra da Ctrl+A komutuyla çizdiğimiz tüm şekli seçip Ctrl+C komutuyla kopyalayıp Ctrl+V komutuyla da "302. Şekil"deki gibi yeni şeklin sol kareleri eski şeklin sağ kareleriyle çakışacak şekilde yapıştıralım. Son olarak ardışık karelerin birleşmemiş olan en yakın köşelerini araç çubuğundaki "Doğru"butonunun altında açılan "Doğru parçası" kısmına tıklayıp birleştirirsek çalışmanın taslağını oluşturmuş oluruz.

Şimdi de "Açı" butonunun altında açılan "Alan" kısmına tıklayıp birer kare, yamuk ve dikdörtgenin alan ölçüleri "302. Şekil"deki gibi bulunur. Taslak çalışma 15 kare, 16 yamuk ve 8 dikdörtgenden oluştuğundan tüm alan,

$15 . 8 + 16 . 12 + 8 . 32 = 568 \text{ br}^2$ bulunur.

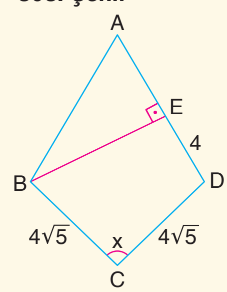
302. Şekil



ALIŞTIRMALAR

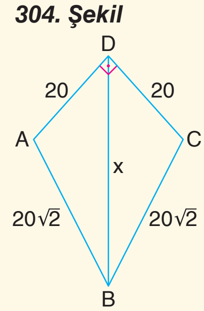
1. "303. Şekil"deki ABCD deltoidinde $|AB| = |AD| = 20$ br, $|BC| = |DC| = 4\sqrt{5}$ br, $[BE] \perp [AD]$ ve $|ED| = 4$ br ise $m(\widehat{BCD}) = x$ kaç derecedir?

303. Şekil



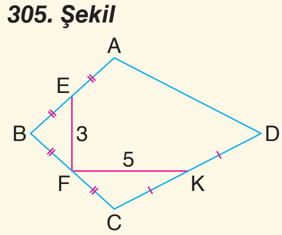
2. "304. Şekil"deki ABCD deltoidinde $|AD| = |DC| = 20$ br, $[AD] \perp [DC]$, $|AB| = |BC| = 20\sqrt{2}$ br ise $|BD| = x$ kaç br dir?

304. Şekil



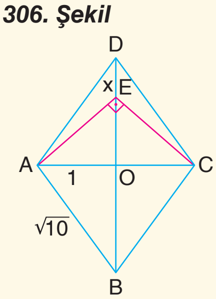
3. "305. Şekil"deki ABCD deltoidinde E, F ve K bulundukları kenarların orta noktaları, $|AB| = |BC|$, $|EF| = 3$ br, $|FK| = 5$ br ise $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?

305. Şekil



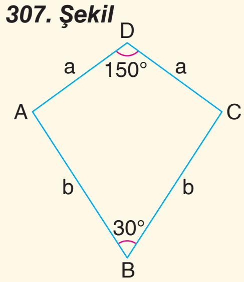
4. "306. Şekil"deki ABCD eşkenar dörtgen, AECB deltoid, $[AE] \perp [EC]$, $|AO| = 1$ br, $|AB| = \sqrt{10}$ br ise $|DE| = x$ kaç br dir?

306. Şekil



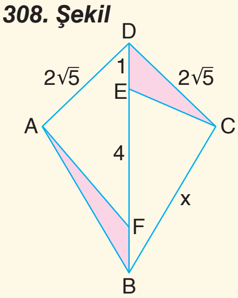
5. "307. Şekil"deki ABCD deltoidinde $|AD| = |DC| = a$ br, $|AB| = |BC| = b$ br, $m(\widehat{ADC}) = 150°$, $m(\widehat{ABC}) = 30°$ ve $a^2 + b^2 = 48$ br^2 ise A(ABCD) kaç br^2 dir?

307. Şekil



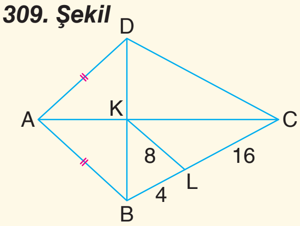
6. "308. Şekil"deki ABCD deltoidinde $A(\widehat{AFB}) = A(\widehat{DEC}) = 2$ br^2, $|AD| = |DC| = 2\sqrt{5}$ br, $|DE| = 1$ br ve $|EF| = 4$ br ise $|BC|$ kaç br dir?

308. Şekil



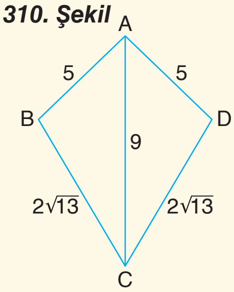
7. "309. Şekil"deki ABCD deltoidinde $|AD| = |AB|$, $3|AK| = |AC|$, $|KL| = 8$ br, $|BL| = 4$ br ve $|LC| = 16$ br ise A(ABCD) kaç br^2 dir?

309. Şekil



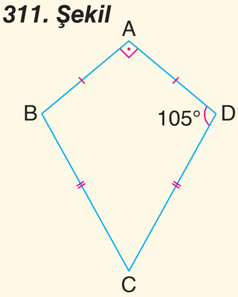
8. "310. Şekil"deki ABCD deltoidinde $|AB| = |AD| = 5$ br, $|BC| = |DC| = 2\sqrt{13}$ br ve $|AC| = 9$ br ise A(ABCD) kaç br^2 dir?

310. Şekil



9. "311. Şekil"deki ABCD deltoidinde $|AB| = |AD|$, $|BC| = |DC|$, $m(\widehat{ADC}) = 105°$, $m(\widehat{BAD}) = 90°$ ve $A(ABCD) = (4 + 4\sqrt{3})$ br^2 ise $|DC|$ değerini bulunuz.

311. Şekil



10. Aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

a. ☐ Paralelkenar, iç açıları 90° olduğunda daima kare adını alır.

b. ☐ Paralelkenarın köşegenleri açıortay olursa kare adını alır.

c. ☐ Deltoid, yamuğun tüm özelliklerine sahiptir.

d. ☐ Dikdörtgenin köşegenleri dik kesişirse kare olur.

e. ☐ Paralelkenarın köşegenleri birbirine dik olursa eşkenar dörtgen olur.

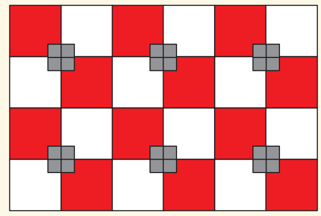
11. Tabanı dikdörtgen şeklinde olan bir mağazanın zemini "312. Şekil"de gösterilen karolarla kaplanacaktır. Küçük gri karoların bir kenar uzunluğu 18 cm, kırmızı ve beyaz karoların bir kenar uzunluğu 45 cm dir.

a. Kırmızı renkle kaplanan bölgenin alanını bulunuz.

b. Gri ve beyaz renkle kaplanan bölgenin alanını bulunuz.

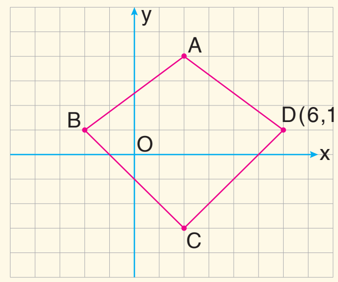
c. Küçük gri karolar yerleştirilirken büyük karolardan kesilen parçaların toplam alanını bulunuz.

312. Şekil



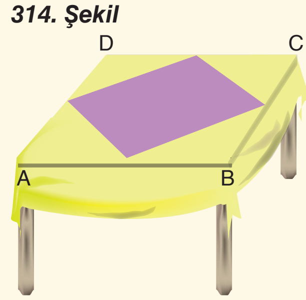
12. "313. Şekil"deki koordinat sisteminde verilen dörtgenin alanını bulunuz.

313. Şekil



13. Dikdörtgen şeklindeki bir masanın kenarlarından 25 cm sarkacak şekilde hazırlanan bir masa örtüsünün ortasına "314. Şekil"deki gibi bir parça eklenecektir. Ek yapılacak parçanın köşeleri masanın kenarlarının orta noktasındadır. $|AB| = 2|BC|$ ve masa örtüsünün uzun kenarı 150 cm ise eklenen parçanın alanını ve çevresini bulunuz.

314. Şekil



14. Köşelerinin koordinatları $A(2, 1)$, $B(7, 4)$, $C(10, 9)$, $D(5, 6)$ olan ABCD dörtgeninin alanını bulunuz.

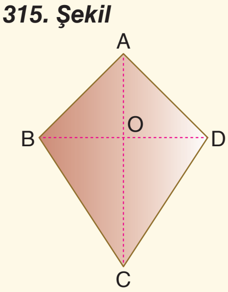
15. Uzunlukları 90 cm olan iki çıta ile "315. Şekil"deki gibi bir uçurtma yapılacaktır.

$[AC] \perp [BD]$, $|BO| = |OD|$ ve $|OC| = 2|AO|$ olmak üzere;

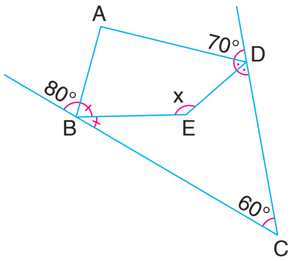
a. Kat yerlerini ihmal ederek uçurtmayı kaplamak için kullanılacak malzemenin alanını bulunuz.

b. Düğüm yerlerini ihmal ederek uçurtmayı çevrelemek için kullanılacak ipin uzunluğunu bulunuz.

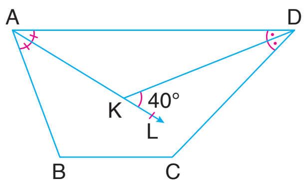
315. Şekil



1. Yandaki şekilde verilenlere göre x kaç derecedir?



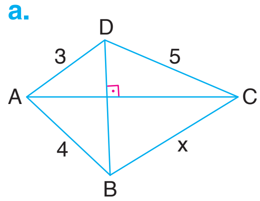
2.



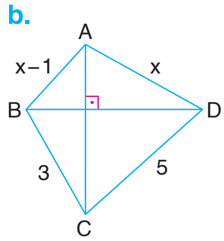
Yukarıda verilen şekildeki ABCD dörtgeninde [AL ve [DK] açıortay, $m(\widehat{DKL}) = 40°$, $m(\widehat{ABC}) - m(\widehat{DCB}) = 50°$ ise $m(\widehat{ABC})$ kaç derecedir?

3. Aşağıdaki dörtgenlerde verilmeyen x değerlerini hesaplayınız.

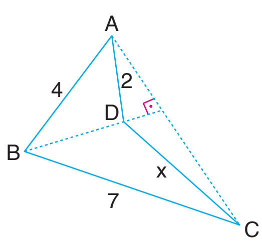
a.



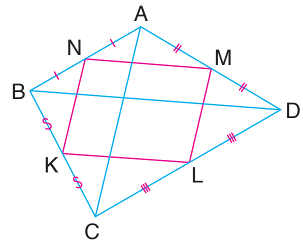
b.



c.



4.



Yukarıdaki şekilde $|NM| + |ML| = 32$ br dir. Verilenlere göre $|AC| + |BD|$ toplamını bulunuz.

5. Yanda verilen şekildeki ABCD dörtgeninde

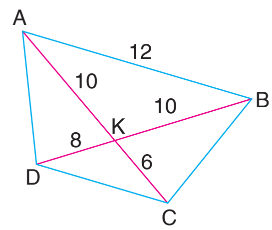
$[AC] \cap [BD] = \{K\}$,

$|AK| = |KB| = 10$ br,

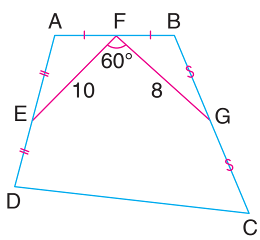
$|DK| = 8$ br,

$|KC| = 6$ br

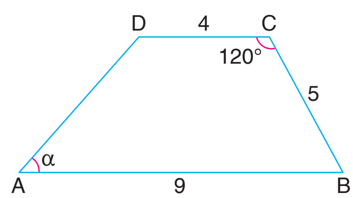
olduğuna göre ABCD dörtgeninin alanını bulunuz.



6. Yanda verilen şekildeki dörtgende E, F, G bulundukları kenarların orta noktalarıdır. Verilenlere göre ABCD dörtgeninin alanını bulunuz.



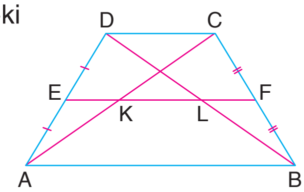
7.



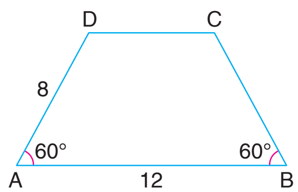
Yukarıda verilen şekildeki ABCD yamuğunda $[AB] // [DC]$, $|DC| = 4$ br, $|CB| = 5$ br, $|AB| = 9$ br ve $m(\widehat{BAD}) = \alpha$ dır. Verilenlere göre α kaç derecedir?

8. Yanda verilen şekildeki ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [CD]$, $[EF]$ orta taban, $|EF| = 11$ br, $|KL| = 5$ br dir.

Verilenlere göre $|AB|$ kaç br dir?

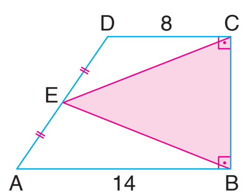


9.



Yukarıda verilen şekildeki ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [CD]$, $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{ABC}) = 60°$, $|AD| = 8$ br, $|AB| = 12$ br ise $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?

10. Yanda verilen şekildeki ABCD dik yamuğunda $[AB] \parallel [DC]$, $[BC] \perp [AB]$, $|AE| = |ED|$, $|AB| = 14$ br, $|AD| = 10$ br, $|DC| = 8$ br ise boyalı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

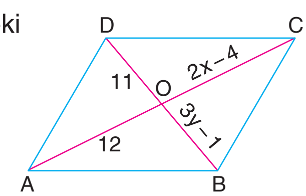


11. Yanda verilen şekildeki ABCD paralelkenarında O köşegenlerin kesim noktasıdır.

$|AO| = 12$ br,

$|OC| = 2x - 4$ br,

$|OB| = 3y - 1$ br, $|DO| = 11$ br ise $x + y$ kaç br dir?



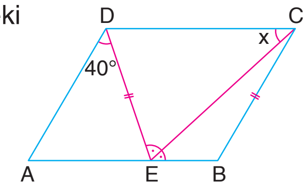
12. Yanda verilen şekildeki ABCD paralelkenarında

$|DE| = |CB|$,

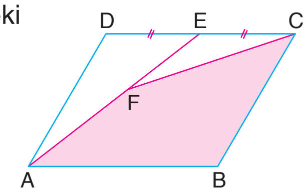
$m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{CEB})$,

$m(\widehat{ADE}) = 40°$

ise $m(\widehat{DCE}) = x$ kaç derecedir?



13. Yanda verilen şekildeki ABCD paralelkenarında $3|EF| = |AE|$, $|DE| = |EC|$ ve $A(AFCB) = 48$ br^2 ise $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?

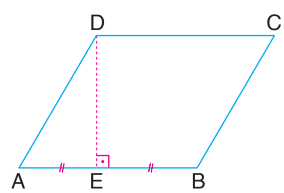


14. Yanda verilen şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde

$|AE| = |EB|$,

$[DE] \perp [AB]$ ise

$m(\widehat{BCD})$ kaç derecedir?



15. Yanda verilen şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde $[AC]$ ve $[BD]$ köşegen,

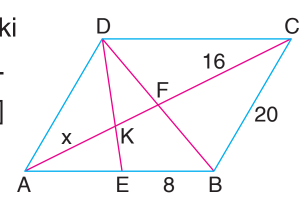
$[AC] \cap [DE] = \{K\}$,

$|CB| = 20$ br,

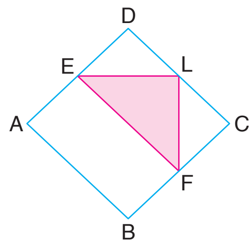
$|EB| = 8$ br,

$|FC| = 16$ br ve

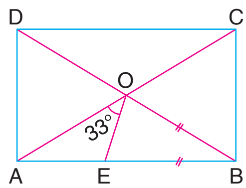
$|AK| = x$ br ise x kaçtır?



16. Yanda verilen şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde $[EF] // [AB]$, $L \in [DC]$, $2|AD| = 5|AE|$, $A(\widehat{EFL}) = 18 \text{ br}^2$ ise $A(ABCD)$ kaç br^2 dir?

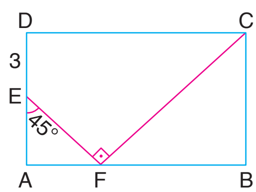


17. Yanda verilen şekildeki ABCD dikdörtgeninde $|OB| = |EB|$ ve $m(\widehat{AOE}) = 33°$ ise $m(\widehat{ACD})$ kaç derecedir?

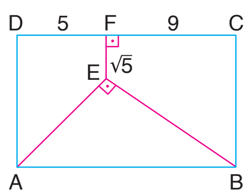


18. Yanda verilen şekildeki ABCD dikdörtgeninde $[EF] \perp [FC]$, $m(\widehat{AEF}) = 45°$, $|DE| = 3$ br dir.

Dikdörtgenin çevresi 18 br ise alanını bulunuz.

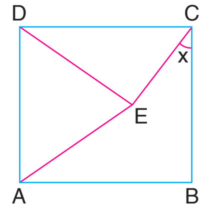


19. Yanda verilen şekildeki ABCD dikdörtgeninde $|DF| = 5$ br, $|FC| = 9$ br, $|FE| = \sqrt{5}$ br, $[EF] \perp [DC]$ ve $[AE] \perp [EB]$ ise A(ABCD) kaç br^2 dir?

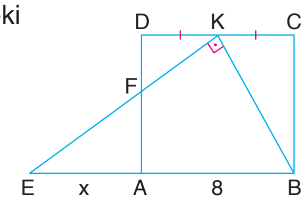


20. Yanda verilen şekildeki ABCD karesinde AED eşkenar üçgendir.

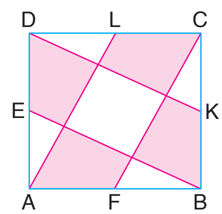
Buna göre $m(\widehat{ECB}) = x$ kaç derecedir?



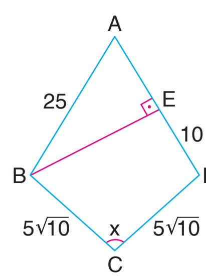
21. Yanda verilen şekildeki ABCD karesinde $|AB| = 8$ br, $|DK| = |KC|$ ve $[EK] \perp [KB]$ ise $|EA| = x$ kaç br dir?



22. Yanda verilen şekildeki ABCD karesinde E, F, K ve L bulundukları kenarların orta noktalarıdır. Buna göre boyalı alanların boyalı olmayan alanlara oranını bulunuz.

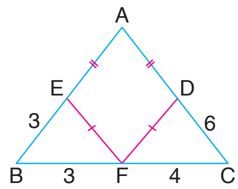


23. Yanda verilen şekildeki ABCD deltoidinde $[BE] \perp [AD]$, $|AB| = 25$ br, $|ED| = 10$ br, $|BC| = |CD| = 5\sqrt{10}$ br ise $m(\widehat{BCD}) = x$ kaç derecedir?

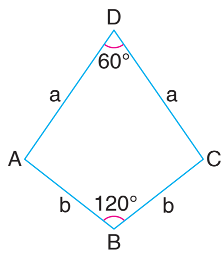


5. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

24. Yanda verilen şekildeki ABC üçgeninde
$|AE| = |AD|$,
$|EF| = |DF|$,
$|BE| = |BF| = 3$ br,
$|FC| = 4$ br,
$|DC| = 6$ br ise $Ç(\widehat{ABC})$ kaç br dir?



25. Yanda verilen şekildeki $ABCD$ deltoidinde
$|AD| = |DC| = a$ br,
$|AB| = |BC| = b$ br,
$m(\widehat{ABC}) = 120°$,
$m(\widehat{ADC}) = 60°$,
$a^2 + b^2 = 48$ ise
$A(ABCD)$ kaç br^2 dir?



26. Aşağıdaki boşluklara ifadelerde belirtilen özelliğe sahip dörtgenlerin adlarını yazınız.

a. Köşegenleri birbirine eştir. ....

b. Karşılıklı kenarları birbirine paraleldir.

....

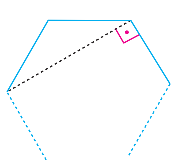
c. Karşılıklı kenar çiftlerinden yalnız biri birbirine paraleldir. ....

d. Köşegenleri birbirine diktir. ....

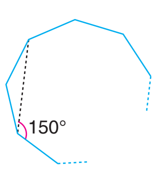
e. Köşegenleri birbiri ile orta noktalarında kesişir. ....

27. Aşağıdaki düzgün çokgenlerin kaç kenarlı olduğunu bulunuz.

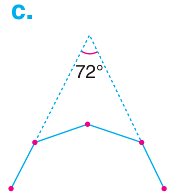
a.



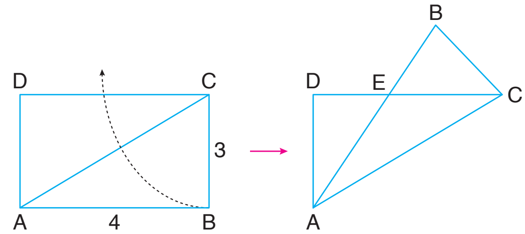
b.



c.



28.

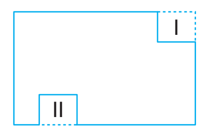


Yukarıdaki ilk şekilde verilen $ABCD$ dikdörtgeni AC köşegeni boyunca katlanarak ikinci şekil elde ediliyor.

$|AB| = 4$ br, $|BC| = 3$ br olduğuna göre $A(\widehat{EAC})$ kaç br^2 dir?

29. $y = -2x + 4$, $y = -2x - 4$, $y = 2x + 4$ ve $y = 2x - 4$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

30. Yandaki şekilde verilen dikdörtgenin içinde I ve II numaralı birbirine eş iki dikdörtgen gösterilmiştir.



Aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

A) II numaralı dikdörtgen şekilden çıkarılırsa şeklin çevre uzunluğu değişmez.

B) I ve II numaralı dikdörtgenler şekilden çıkarılırsa şeklin çevre uzunluğu artar.

C) I numaralı dikdörtgen şekilden çıkarılırsa şeklin alanı değişmez.

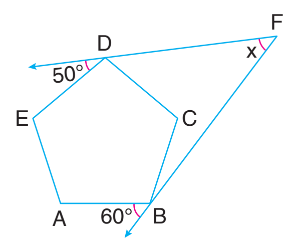
D) II numaralı dikdörtgen şekilden çıkarılırsa şeklin çevre uzunluğu azalır.

E) II numaralı dikdörtgen şekilden çıkarılırsa şeklin alanı değişmez.

31. İç açılarının ölçüleri toplamı 1440° olan çokgenin kenar sayısını bulunuz.

32. Yandaki şekilde $ABCDE$ düzgün beşgendir.

Verilenlere göre x kaç derecedir?



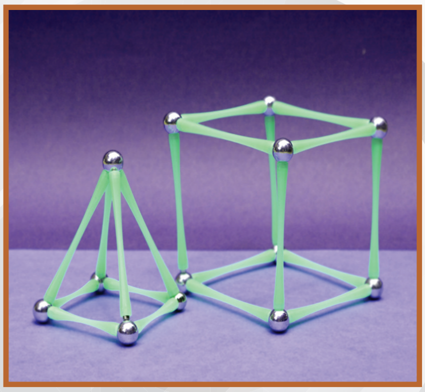
6. ÜNİTE

UZAY GEOMETRİ

Neler Öğreneceğiz?

- Bazı prizma ve piramitlerin yüzey alanları ile hacimlerini bulmayı öğreneceğiz.

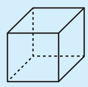
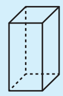
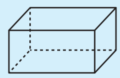
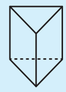
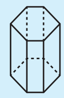
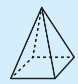
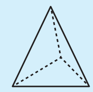
Neden Öğrenmeliyiz?



Hayatımızı geçirmekte olduğumuz evlerimizin büyük bir çoğunluğu prizmatik şekillere sahiptir. Prizma şeklindeki evlerimize uygulatmak istediğimiz zemin kaplaması için taban alanlarının, duvarlarımıza uygulatmak istediğimiz duvar kâğıtları için yanal alanlarının, uygun ısıtma ve soğutma sağlayacak sistemlerin montajı için evimizin hacminin hesaplanması gerekmektedir. Yukarıdaki birkaç örnek katı cisimlerin alan ve hacim hesaplamalarının günlük hayatımızda hangi sıklıkta kullanıldığını yeterince göstermektedir.

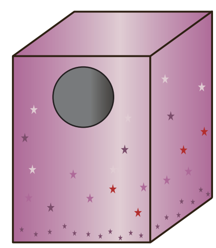
ÖNCEKİ BİLGİLERİNİ TEST ET

1. Aşağıda çizimleri verilen geometrik cisimleri inceleyerek tabloyu doldurunuz.

Adı ve Özellikleri \ Geometrik Cisim							
Cismin adı							
Yanal yüz sayısı							
Ayrıt sayısı							
Köşe sayısı							

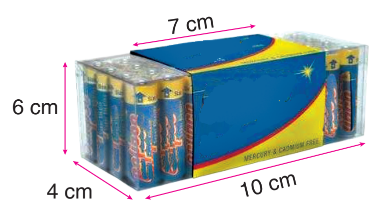
2. Boyutları 24 cm, 32 cm ve 40 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki bir tahta parçasından mümkün olan en büyük eş küpler elde edilmek isteniyor. Küp şeklinde kaç tane parça elde edileceğini bulunuz.

1. Şekil



3. "1. Şekil"de taban ayrıtı 20 cm, yüksekliği ise 50 cm olan kare dik prizma şeklindeki ayaklı çöp kovası verilmiştir. Çöp kovasının yanal yüzü kaplanırken 3700 cm^2 malzeme kullanılmıştır. Buna göre kovanın ağzını oluşturmak için yan yüzden çıkarılan dairesel bölgenin yarıçapı kaç santimetredir ($\pi = 3$ alınız.)?

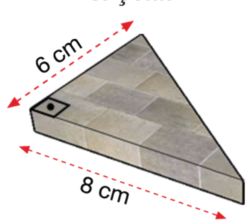
2. Şekil



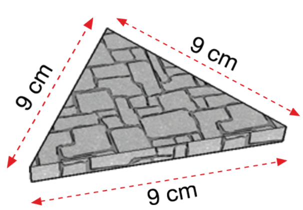
4. "2. Şekil"de gösterilen dikdörtgenler prizması şeklindeki pil kutusunun etrafına etiket geçirilmiştir. Etiketin genişliği 7 cm olduğuna göre etiketin alanını bulunuz.

5. Aşağıda kalınlıkları 2 cm olan üç farklı mermer taş gösterilmiştir. Her bir seçenekte verilen mermerlerden onar tanesi üst üste yerleştirildiğinde oluşacak olan dik prizmaların yüzey alanlarını bulunuz.

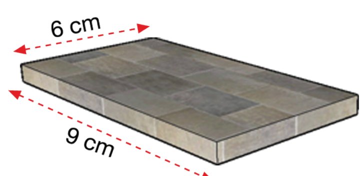
a. ***3. Şekil***



b. ***4. Şekil***



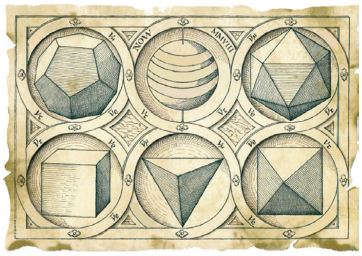
c. ***5. Şekil***



BÖLÜM 6.1

KATI CİSİMLER

Dik Prizmaların ve Dik Piramitlerin Uzunluk, Alan ve Hacim Bağıntıları



Bütün ayrıt uzunlukları eşit ve yüzeyleri düzgün çokgen olan üç boyutlu cisimlere düzgün çok yüzlüler ya da Platonik cisimler denir.

Tüm uğraşlara rağmen sadece 5 tane bulunabilen bu çok yüzlülere, ünlü filozof ve matematikçi Platon farklı anlamlar yüklemiştir. Bu cisimlerin doğayı anlattığını düşünen Platon, Timaios (*Timuş*) adlı eserinde; her yüzü bir eşkenar üçgen olan dört yüzlünün ateşi, sekiz yüzlünün havayı, yirmi yüzlünün suyu, yüzleri kareler olan küpün toprağı ve yüzleri düzgün beşgenlerden oluşan on iki yüzlünün de evreni simgelediğinden bahsetmektedir.

Bu ünitede bu cisimlerin bazılarının alan ve hacim bağıntılarını oluşturmayı öğreneceğiz.

TERİMLER

- Dik prizma
- Dik piramit
- Yükseklik
- Taban alanı
- Yanal alan
- Yüzey alanı
- Hacim

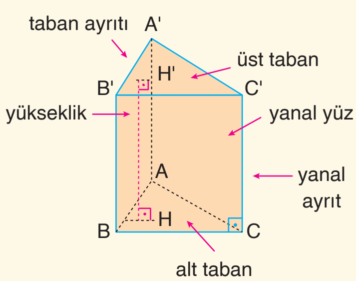
Bir prizmanın altını ve üstünü oluşturan çokgensel bölgeler prizmanın **tabanlarıdır.** Prizmanın taban kenarlarına **taban ayrıtları**, tabanların karşılıklı köşe noktalarını birleştiren doğru parçalarına da **yanal ayrıtları** denir. İki yanal ayrıt arasında kalan ve bir tabanın kenar sayısı kadar bulunan paralelkenarsal bölgelere **yanal yüzler**, iki taban arasındaki uzaklığa da prizmanın **yüksekliği** adı verilir.

Prizmalar tabanlarındaki şekillere göre adlandırılırlar.

1. Örnek

"6. Şekil" de verilen prizmanın temel elemanlarını inceleyelim.

6. Şekil



Prizmalar taban şekillerine göre adlandırılır. "6. Şekil" deki prizmanın tabanları üçgen şeklinde olduğu için prizma, üçgen prizma olarak adlandırılır. Tabanı oluşturan üçgenler eşkenar üçgen olsaydı prizma düzgün prizma olurdu.

Prizmanın taban kenarlarını oluşturan [AB], [BC], [AC], [A'B'], [B'C'] ve [A'C'] taban ayrıtlarıdır. Prizmanın tabanlarının karşılıklı köşe noktalarını birleştiren [AA'], [BB'] ve [CC'] ları yanal ayrıtları oluşturur. Ayrıca $[BC] \perp [CC']$ olduğundan prizma dik prizmadır.

Prizmanın iki tabanının arasındaki [HH'] prizmanın yüksekliğidir.

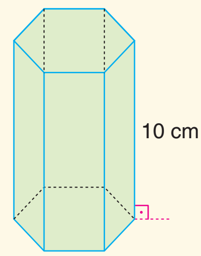
İki yanal ayrıt arasında kalan ve tabanların kenar sayısı kadar olan ABB'A', ACC'A' ve BCC'B' dikdörtgenleri prizmanın yanal yüzlerini oluşturur.

Bu üçgen prizma, tabanı olan üçgensel bölgenin üç kenarı olduğundan üç yanal yüze sahiptir.

Sıra Sizde

"7. Şekil" deki prizmanın temel elemanlarını açıklayınız.

7. Şekil



Prizmaların Yüzey Alanı	Bütün dik prizmalarda yüzey alanı, taban alanları ile yanal alanlarının toplamından oluşur. Dik prizmalarda, Yanal Alan = (Taban Çevresi).(Yükseklik) bağıntısıyla bulunur. Herhangi bir prizmada iki eş taban bulunduğundan prizmaların yüzey alanı, Yüzey Alanı = 2.(Taban Alanı) + (Yanal Alan) bağıntısıyla bulunur.

TEKNOLOJİ

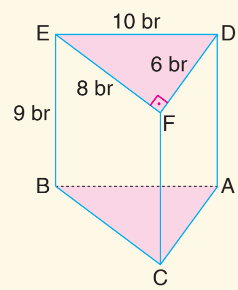
Prizmaların açınımlarını görebileceğiniz, yüzey alanları ve hacimleriyle ilgili hesaplamalar yapabileceğiniz uygulamaya ulaşmak için ***http://f.eba.gov.tr/MatematikAraclariUygulamasi*** *adresini ziyaret ediniz.*

2. Örnek

Aşağıda bazı prizmaların yüzey alan bağıntıları oluşturulmuştur. İnceleyelim:

I. "8. Şekil"deki, tabanının kenar uzunlukları 6 br, 8 br ve 10 br olan dik üçgen dik prizmanın yüksekliği 9 br dir. Buna göre üçgen dik prizmanın yüzey alanının nasıl bulunduğunu inceleyelim. Tabanı $\widehat{ABC}$ ve yüksekliği h olan üçgen dik prizmanın yüzey alan bağıntısını oluşturalım:

8. Şekil



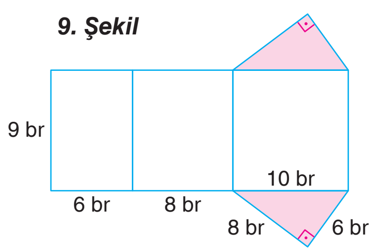
Yanal yüzlerin alanlarının toplamı,

$$\underbrace{9}_{\text{Yükseklik}}.\underbrace{(6+8+10)}_{Ç(\widehat{ABC})} = 216 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

Alt ve üst taban alanlarının toplamı,

$$2.\underbrace{[6.8:2]}_{A(\widehat{ABC})} = 48 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

9. Şekil



Buna göre verilen dik prizmanın yüzey alanı $216 + 48 = 264$ br^2 dir.

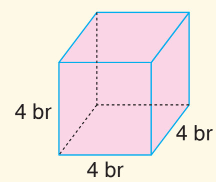
O hâlde tabanı ABC üçgeni ve yüksekliği h olan üçgen dik prizmanın yüzey alanı,

Y.A = (Yükseklik).(Tabanın Çevre Uzunluğu) + 2.(Taban Alanı)

$= \mathbf{h.Ç(\widehat{ABC}) + 2.A(\widehat{ABC})}$ bağıntısıyla bulunur.

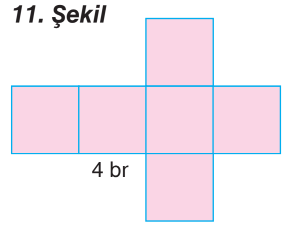
II. **"10. Şekil" deki, ayrıt uzunluğu 4 br olan küpün yüzey alanının nasıl bulunduğunu inceleyelim. Ayrıt uzunluğu a olan bir küpün yüzey alan bağıntısını oluşturalım:**

10. Şekil



Küp, 6 eş kareden oluştuğundan yüzey alanı, bu 6 eş karenin alanlarının toplamına eşittir.

11. Şekil



Küpün yüzey alanı,

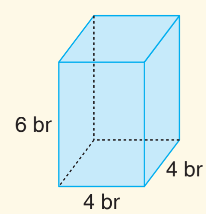
$Y.A = 6.4^2 = 6.16 = 96$ br^2 olur.

Ayrıt uzunluğu a olan bir küpün yüzey alanı,

$\mathbf{Y.A = 6.a^2}$ bağıntısı ile bulunur.

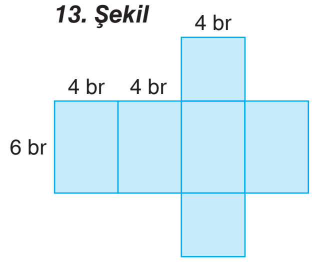
III. **"12. Şekil" deki tabanın kenar uzunluğu 4 br ve yüksekliği 6 br olan kare dik prizmanın yüzey alanının nasıl bulunduğunu inceleyelim. Tabanının kenar uzunluğu a, yüksekliği h olan kare dik prizmanın yüzey alan bağıntısını oluşturalım:**

12. Şekil



Kare dik prizma, tabanındaki 2 eş kare ve yan yüzlerindeki 4 eş dikdörtgenden oluştuğundan yüzey alanı, bu 2 eş kare ve 4 eş dikdörtgenin alanlarının toplamına eşittir.

13. Şekil



$Y.A = \underbrace{4^2 + 4^2} + \underbrace{6.4 + 6.4 + 6.4 + 6.4}$

$= 2.4^2 + 6.(4 + 4 + 4 + 4)$

$= 2.16 + 6.16 = 32 + 96 = 128$ br^2 olur.

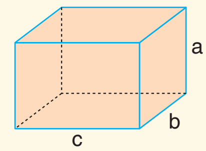
Yukarıdaki eşitlik dikkatle incelenirse kare dik prizmanın yüzey alanının, Y.A = 2.(Taban Alanı) + (Yükseklik).(Tabanın Çevre Uzunluğu) olduğu görülür.

O hâlde tabanın bir kenar uzunluğu a, yüksekliği h olan kare dik prizmanın yüzey alanı,

$\mathbf{Y.A = 2a^2 + 4ah}$ bağıntısı ile bulunur.

IV. **"14. Şekil" deki, ayrıt uzunluğu a br, b br ve c br olan bir dikdörtgenler prizmasının yüzey alan bağıntısını açınımından faydalanarak bulalım.**

14. Şekil



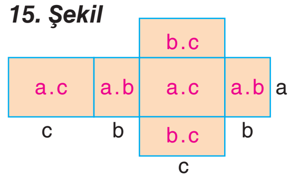
"15. Şekil"de açınımı verilen dikdörtgenler prizmasının yüzey alanı,

$Y.A = a.b + a.b + a.c + b.c + a.c + b.c$

$= 2.a.b + 2.a.c + 2.b.c$

$= 2.(a.b + a.c + b.c)\ br^2$ bulunur.

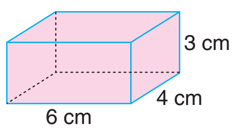
15. Şekil



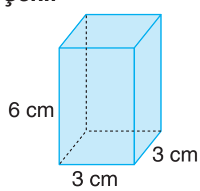
Sıra Sizde

Aşağıdaki prizmaların yüzey alanlarını bulunuz.

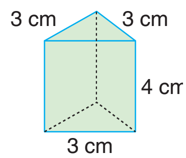
16. Şekil



17. Şekil



18. Şekil



3. Örnek

Yandaki fotoğrafta 1902 yılında inşa edilmeye başlanan ve New York *(Niv York)* şehrinin ilk gökdeleni olan Flatiron *(Fletayn)* binası görülmektedir. Bina, ilk gökdelen olmasının yanında üçgen dik prizma şekliyle de ilgi çekmektedir. Dik üçgen şeklindeki tabanının dik kenar uzunlukları 27 m ve 36 m olan bina yaklaşık 90 m yüksekliğindedir. Bina tadilata alınacak olmasından dolayı yanal yüzleri çevreye rahatsızlık vermemek için bezlerle çevrelenecektir. Buna göre bu iş için gerekli olan bezin alanını bulalım.

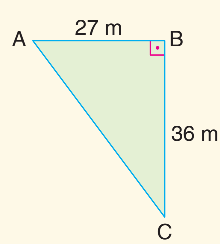
"19. Şekil" deki taban modeline göre dik üçgensel bölgenin hipotenüs uzunluğu Pisagor teoreminden

$|AC|^2 = 27^2 + 36^2 \Rightarrow |AC|^2 = 729 + 1296$

$\Rightarrow |AC|^2 = 2025$

$\Rightarrow |AC| = 45$ m bulunur.

19. Şekil



Bez sadece yanal yüzeylere örtüleceğinden prizmanın yanal alanını bulmalıyız.

Yanal alan; taban çevresi ile yükseklik uzunluğunun çarpımı şeklinde bulunacağından ihtiyaç duyulacak bezin alanı,

$(27 + 36 + 45).90 = 108.90 = 9720\ m^2$ bulunur.

Sıra Sizde

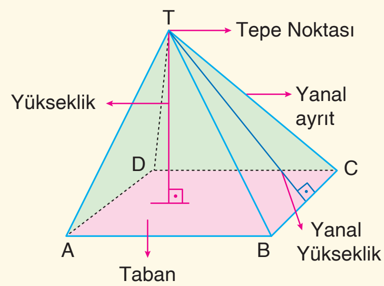
"3. Örnek"te özellikleri verilen binanın üçgen dik prizma şeklinde $\frac{1}{90}$ ölçekli maketini yapacak olduğunuzu düşününüz. Bu durumda prizmayı oluşturmak için kaç cm^2 kartona ihtiyaç duyacağınızı bulunuz.

Piramidin tabanındaki çokgensel bölgeye piramidin **tabanı**, taban düzleminin dışındaki noktaya (T) piramidin **tepe noktası**, tabanı oluşturan çokgenin bir köşesi ile T noktasının belirttiği doğru parçasına piramidin **yanal ayrıtı**, T noktasından çokgensel bölgenin bulunduğu düzleme indirilen dikme parçasına **piramidin yüksekliği** adı verilir. "20. Şekil"deki piramit (T, ABCD) şeklinde isimlendirilir.

Tepe noktası ve çokgenin ağırlık merkezinden geçen doğru, çokgenin düzlemine dik ise piramide dik piramit, tabanı düzgün çokgensel bölgeden oluşan dik piramide **düzgün piramit** adı verilir.

Düzgün piramitlerde ikizkenar üçgensel bölge olan yanal yüzler eş, yanal ayrıtlar eş ve yanal yüzlerin yükseklikleri de eştir.

20. Şekil

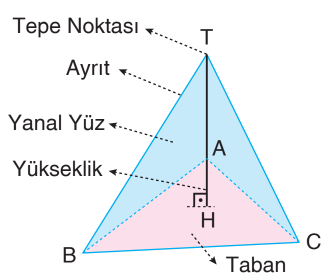


4. Örnek

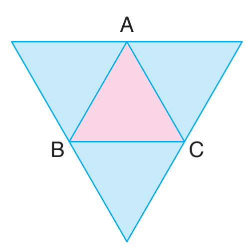
Aşağıdaki piramitleri, temel elemanlarını ve açınımlarını inceleyelim.

Üçgen Dik Piramit ve Açınımı

21. Şekil

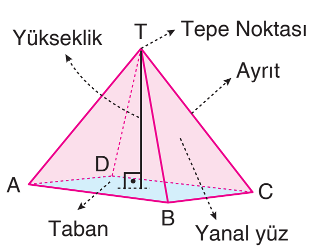


22. Şekil

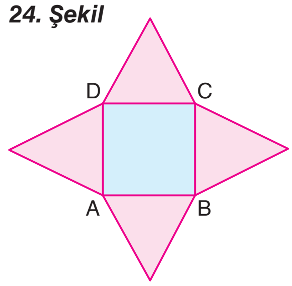


Kare Dik Piramit ve Açınımı

23. Şekil



24. Şekil

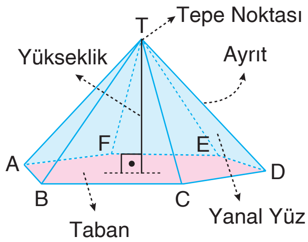


TEKNOLOJİ

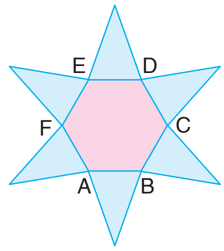
Piramitlerin açınımlarını görebileceğiniz, yüzey alanları ve hacimleriyle ilgili hesaplamalar yapabileceğiniz uygulamaya ulaşmak için ***http://f.eba.gov.tr/MatematikAraclariUygulamasi*** *adresini ziyaret ediniz.*

Düzgün Altıgen Dik Piramit ve Açınımı

25. Şekil



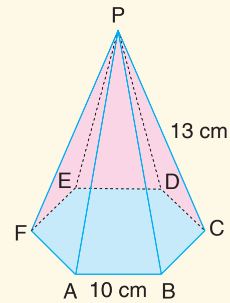
26. Şekil



Sıra Sizde

"27. Şekil" deki piramidin temel elemanlarını açıklayınız.

27. Şekil



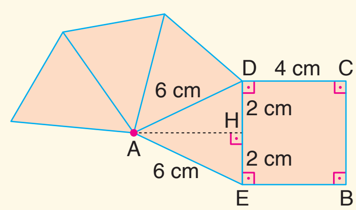
Piramidin Yüzey Alanı	Bütün dik piramitlerde yüzey alanı, taban alanı ve yanal alanların toplamından oluşur. Dik piramitlerde eş üçgensel bölgelerden oluşan yanal alan, Yanal Alan $= \frac{1}{2}$.(Taban Çevresi).(Yan Yüz Yüksekliği) bağıntısıyla bulunur. Piramitlerin yüzey alanı, Yüzey Alanı = Taban Alanı + Yanal Alan bağıntısıyla bulunur.

5. Örnek

Tabanının kenar uzunluğu 4 cm, yan yüzlerini oluşturan ikizkenar üçgenlerin eş kenarlarının uzunluğu 6 cm olan kare dik piramidin yüzey alanını bulalım.

"28. Şekil"de açınımı verilen kare piramidin taban alanı, $A(BCDE) = 16 \text{ cm}^2$ dir.

28. Şekil



İkizkenar üçgensel bölge olan yanal yüzlerden birinin alanını bulalım:

$|AH|^2 = 6^2 - 2^2 \Rightarrow |AH|^2 = 32$

$\Rightarrow |AH| = 4\sqrt{2}$ cm olur.

$$A(\widehat{AED}) = \frac{|ED|.|AH|}{2} = \frac{4.4\sqrt{2}}{2}$$

$$= 8\sqrt{2} \text{ cm}^2 \text{ dir.}$$

Piramidin taban alanı ile yan yüzlerinden birinin alanının 4 katı toplanırsa kare dik piramidin yüzey alanı,

$$Y.A = A(BCDE) + 4.A(\widehat{AED}) = 16 + 4.8\sqrt{2}$$
$$= (16 + 32\sqrt{2})\,cm^2 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

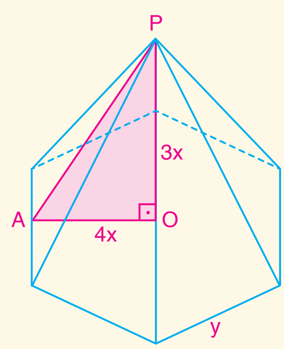
Taban ayrıtı 8 cm ve yanal ayrıtı da 5 cm olan bir kare dik piramidin yüzey alanını bulunuz.

6. Örnek

Yandaki fotoğrafta görülen ahşap çardağın çatısı düzgün altıgen dik piramit şeklindedir. Çatının taban ayrıtı y m, taban merkezinin taban ayrıtına uzaklığı 4x m ve çatının yüksekliği 3x m dir. Buna göre çatının kiremit kaplanan yüzeyinin alanını bulalım.

Çatıyı "29. Şekil"deki gibi modelleyerek verilen ölçüleri yerleştirelim. Çatının modelinde oluşturulan AOP dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa yan yüzün yüksekliği olan [AP] nın uzunluğu bulunur.

29. Şekil



Buna göre

$$|AP|^2 = |AO|^2 + |OP|^2 \Rightarrow |AP|^2 = (4x)^2 + (3x)^2$$
$$\Rightarrow |AP|^2 = 16x^2 + 9x^2$$
$$\Rightarrow |AP|^2 = 25x^2$$
$$\Rightarrow |AP| = 5x \text{ m dir.}$$

Çatının kiremit ile kaplanan alanı piramidin yanal alanıdır. Piramitlerde yanal alan, taban çevresinin yan yüz yüksekliği ile çarpımının yarısına eşittir. Buna göre kiremit kaplanacak alan,

$$\text{Yanal Alan} = \frac{(\text{Taban Çevresi}).(\text{Yükseklik})}{2}$$
$$= \frac{6.y.5x}{2}$$
$$= 15xy\ m^2 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

Bir düzgün altıgen piramidin tabanının en uzun köşegeni 10 cm ve yüksekliği 12 cm dir. Buna göre bu düzgün altıgen piramidin yanal alanını bulunuz.

7. Örnek

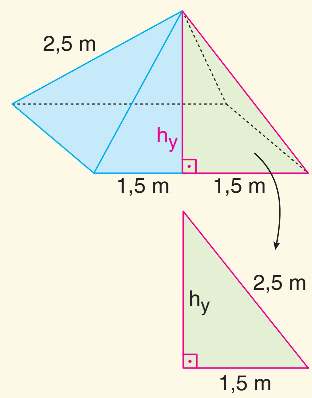
Yandaki fotoğrafta yazın güneşten korunmayı sağlayan ve üç yanı açılabilir perdelerden oluşan bir kameriye görülmektedir. Kameriyenin yanal yüzleri, ayrıtları 3 m olan karesel bölgeler, tavanı da yanal ayrıtı 2,5 m olan kare dik piramit şeklindedir. Kameriyenin güneşten eskiyen yüzünü yenisiyle değiştirmek isteyen sahibi kullanacağı kumaşın metrekare fiyatının 15 TL olduğunu öğrenmiştir. Buna göre bu iş için harcanması gereken parayı bulalım.

Kameriyenin alt kısmı küp, tavanı da kare piramit şeklindedir. Ancak kameriye, küpün ve piramidin yanal yüzleri kaplanarak oluşturulmuştur. Buna göre ihtiyaç olan yüzün alanı küp ve kare piramidin yanal alanlarının toplamı kadardır.

Küpün yanal alanı, kenar uzunluğu 3 m olan 4 karesel bölgeden oluşmuştur. Buna göre kameriyenin yan yüzlerini kaplamak için $4 \cdot 3^2 = 36\ m^2$ kumaş gereklidir.

Kameriyenin kare dik piramit şeklindeki üst kısmı "30. Şekil"de modellenmiştir.

30. Şekil



Piramidin yan yüz yüksekliği Pisagor teoreminden,

$$(2,5)^2 = (1,5)^2 + h_y^2 \Rightarrow 6,25 = 2,25 + h_y^2$$
$$\Rightarrow h_y^2 = 4$$
$$\Rightarrow h_y = 2 \text{ m dir.}$$

Buna göre piramidin yanal alanı, $4 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 12\,m^2$ dir.

O hâlde kullanılacak kumaşın yüzey alanı toplamda $36 + 12 = 48\ m^2$ dir. Metrekare fiyatı 15 TL olan kumaştan $48\ m^2$ kullanılacağından bu iş için harcanması gereken para, $48 \cdot 15 = 720$ TL dir.

Sıra Sizde

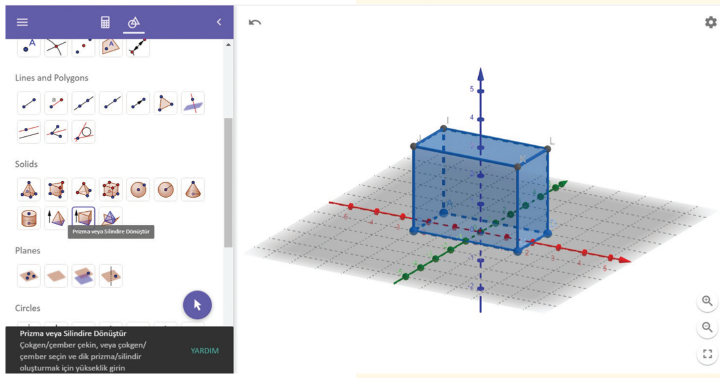
"7. Örnek"teki kameriyenin ölçülerinin iki katı ölçülere sahip bir kameriyenin metrekaresi 10 TL olan bir kumaşla kaplanması durumunda ödenecek parayı bulunuz.

8. Örnek

3 boyutlu dinamik geometri yazılımı kullanarak taban ayrıtları 2br ve 4 br, yüksekliği de 3 br olan bir dikdörtgenler prizmasının içine çizilebilecek en büyük hacimli dikdörtgen dik piramidinin yanal alanını bulalım.

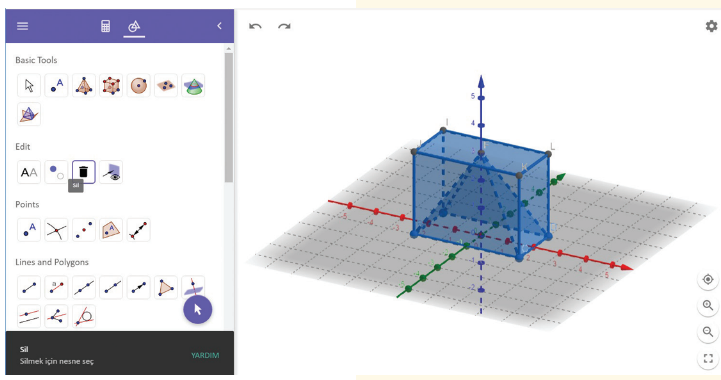
3 boyutlu dinamik geometri yazılımında boş bir çalışma sayfası açalım. Açtığımız çalışma sayfasında çizeceğimiz cisimlerin ayrıt uzunluklarını kolayca belirleyebilmek için düzlem üzerine fare yardımıyla sağı tıklayarak "Izgarayı Göster" seçeneğini işaretleyelim. Şimdi sayfanın solundaki araç kutusundan "Çokgen"i seçtikten sonra 2 br ve 4 br lik bir dikdörtgen çizelim. Sonra araç kutusundan "Prizma veya Silindire Dönüştürür" butonunu tıkladıktan sonra açılan uzunluk penceresine yükseklik olarak 3 br yazıp onaylayalım (31. Şekil).

31. Şekil



Bir dikdörtgenler prizmasının içine çizilebilecek en büyük hacimli dikdörtgen dik piramidin tepe noktası prizmanın tavan yüzünün köşegenlerinin kesişim noktasıdır. Bu durumda araç kutusundan "Piramit veya Koniye Döndür" butonunu tıkladıktan sonra prizmanın tabanını seçip açılan uzunluk penceresine yükseklik olarak 3 br yazıp onaylayalım. Bundan sonraki hesaplamalarımız piramitle ilgili olduğundan araç kutusundaki "Sil" butonunu seçtikten sonra prizmayı seçip silelim (32. Şekil).

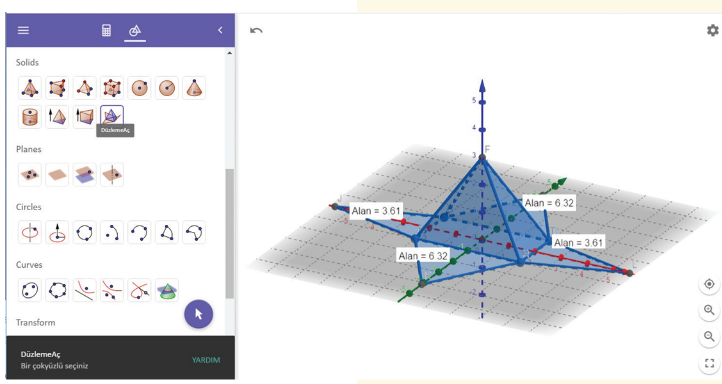
32. Şekil



Şimdi araç kutusundan "Düzleme Aç" butonunu tıkladıktan sonra çalışma sayfasında yalnız kalan piramidi seçelim. Daha sonra araç kutusundaki "Alan" butonunu tıklayıp sonra piramidin düzleme açılan üçgensel yanal yüzlerine fare yardımıyla teker teker tıklayarak her bir yanal yüzeyin alanını bulalım (33. Şekil). Buna göre piramidin yanal alanı yaklaşık olarak,

$6{,}32+3{,}61+6{,}32+3{,}61=19{,}86\ br^2$ bulunur.

33. Şekil

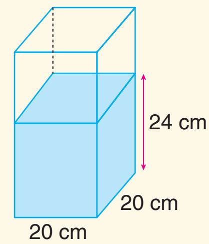


Dik Prizmaların Hacmi	Bütün prizmalarda hacim, taban alanı ile yükseklik uzunluğunun çarpımına eşittir. Buna göre prizmaların hacmi, Hacim = (Taban Alanı) . (Yükseklik) bağıntısıyla bulunur.

9. Örnek

Taban ayrıtı 20 cm, yüksekliği de 40 cm olan bir kare prizmanın içinde 24 cm yüksekliğinde su bulunmaktadır. Bu prizma yan yüzeyi üzerine yatırıldığında içindeki suyun yüksekliğinin kaç santimetre olacağını bulalım.

34. Şekil

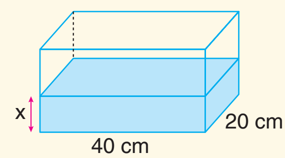


Prizmanın ilk durumu "34. Şekil" de olduğu gibidir. Prizmada bulunan suyun hacmini bulalım.

Sıvılar içinde bulundukları kabın şeklini alırlar. Bu yüzden prizmadaki su 24 cm yükseklik ve 20 cm taban ayrıtına sahip bir kare prizma olarak düşünülebilir. Buna göre suyun hacmi, $20 . 20 . 24 = 9600\ cm^3$ tür.

Kare prizma yan yatırıldığında içindeki suyun hacmi değişmeyecektir. Ancak bu durumda su, "35. Şekil" de olduğu gibi taban ayrıtları 40 cm ve 20 cm, yüksekliği x cm olan bir dikdörtgenler prizması şeklini alacaktır.

35. Şekil



Suyun hacmi $9600\ cm^3$ e eşit olduğundan,

$9600 = 40 . 20 . x \Rightarrow 9600 = 800x$

$\Rightarrow x = 12$ cm bulunur.

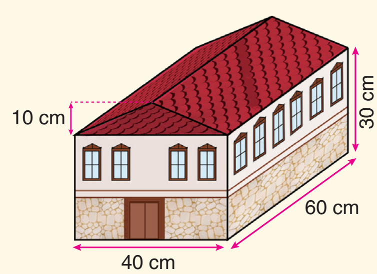
Sıra Sizde

Taban ayrıtı 15 cm, yüksekliği de 45 cm olan bir kare prizmanın içinde 25 cm yüksekliğinde su bulunmaktadır. Bu prizma yan yüzeyi üzerine yatırıldığında içindeki suyun yüksekliğinin kaç santimetre olacağını bulunuz.

10. Örnek

Ankara'nın Beypazarı ilçesi, Osmanlı Devleti zamanında önemli bir ticaret yolunun üzerinde bulunmaktaydı. Beypazarı ilçesi, günümüzde de önemli bir turizm merkezi durumundadır. Turistlerin ilçeden ayrılırken hatıra olarak aldığı eşyalardan büyük çoğunluğu Beypazarı evlerinin maketidir. "36. Şekil" de herhangi bir Beypazarı evinin $\frac{1}{40}$ oranında küçültülmüş maketinin modeli verilmiştir. Buna göre gerçek evin hacminin kaç metreküp olduğunu bulalım.

36. Şekil



Maket evin çatısı üçgen dik prizma, çatı altındaki bölge ise dikdörtgenler prizması şeklindedir.

Maketin hacmini, çatıyı oluşturan üçgen prizma ile çatı altındaki dikdörtgenler prizmasının hacimlerini toplayarak bulalım.

Üçgen prizmanın taban alanı $\frac{40.10}{2} = 200 \text{ cm}^2$ dir. Taban alanı ile yükseklik uzunluğu olan 60 cm çarpılırsa çatının hacmi;
$200.60 = 12\,000 \text{ cm}^3$ bulunur.

Çatı altında kalan dikdörtgenler prizmasının hacmi, taban alanı ile yükseklik uzunluğunun çarpımı olduğundan $40.60.30 = 72\,000 \text{ cm}^3$ tür.

Buna göre maketin hacmi $12\,000 + 72\,000 = 84\,000 \text{ cm}^3$ bulunur.

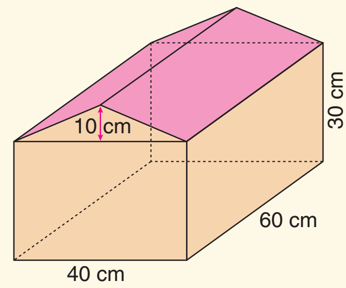
Benzer iki cismin hacimlerinin oranı, benzerlik oranının küpüne eşittir. Buna göre maketin hacmi ile gerçek evin hacminin oranı $\left(\frac{1}{40}\right)^3 = \frac{1}{64\,000}$ dir.

Bu oran bize 1 cm^3 lük maket hacminin gerçekte $64\,000 \text{ cm}^3$ lük hacme karşılık geldiğini göstermektedir.

Buna göre maketin hacminin, gerçek evin hacmine oranı hacimler oranına eşitlenirse,

$\frac{84\,000}{x} = \frac{1}{64\,000} \Rightarrow x = 5\,376\,000\,000 \text{ cm}^3$ bulunur. Sonuç metreküp cinsinden istendiğinden gerçek evin hacmi 5376 m^3 olarak bulunur.

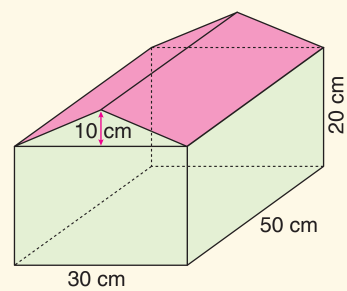
37. Şekil



Sıra Sizde

"38. Şekil" de herhangi bir Beypazarı evinin $\frac{1}{30}$ oranında küçültülmüş maketinin modeli verilmiştir. Buna göre model alınan gerçek evin hacminin kaç metreküp olduğunu bulunuz.

38. Şekil

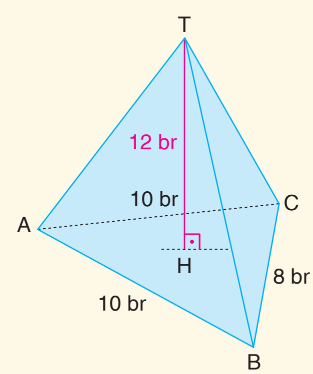


Dik Piramitlerin Hacmi	Bir dik piramidin hacmi, tabanı ve yüksekliği piramidin tabanı ve yüksekliğine eş olan dik prizmanın hacminin üçte birine eşittir. Buna göre, $\text{Hacim} = \frac{1}{3}.(\text{Taban Alanı}).(\text{Yükseklik})$ bağıntısıyla bulunur.

11. Örnek

"39. Şekil" deki ikizkenar üçgen dik piramitte $|AB| = |AC| = 10$ br, $|BC| = 8$ br ve $|TH| = 12$ br olduğuna göre piramidin hacminin kaç birim küp olduğunu bulalım.

39. Şekil



Önce piramidin taban alanını bulalım. "40. Şekil" deki ABC ikizkenar üçgenin tabanına ait yüksekliği Pisagor teoreminden,

$|AD|^2 = |AC|^2 - |DC|^2 \Rightarrow |AD|^2 = 10^2 - 4^2$

$\Rightarrow |AD| = \sqrt{84}$

$\Rightarrow |AD| = 2\sqrt{21}$ br bulunur.

$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{|BC|.|AD|}{2}$

$= \dfrac{8.2\sqrt{21}}{2}$

$= 8\sqrt{21}$ br^2 olur.

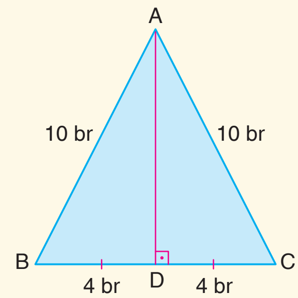
Piramidin hacmi,

$V = \frac{1}{3}.(\text{Taban Alanı}).(\text{Yükseklik})$ olduğundan bulduğumuz değerleri yerine yazıp hacmi bulalım:

$V = \frac{1}{3}.8\sqrt{21}.12$

$= 32\sqrt{21}$ br^3 bulunur.

40. Şekil



Sıra Sizde

"11. Örnek" teki ikizkenar üçgen dik piramitte $|AB| = |AC| = 13$ br, $|BC| = 10$ br ve $|TH| = 18$ br olması durumunda piramidin hacminin kaç birim küp olduğunu bulunuz.

12. Örnek

Tabanının kenar uzunluğu 8 br ve hacmi $384\sqrt{3}$ br^3 olan düzgün altıgen dik piramidin yüksekliğini bulalım.

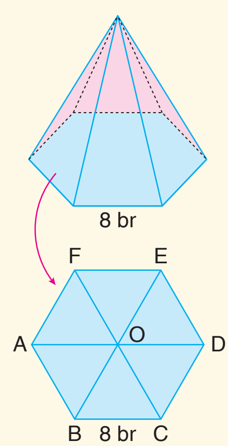
Düzgün altıngensel bölge, birbirine eş 6 eşkenar üçgensel bölgeden oluştuğundan kenar uzunluğu 8 br olan eşkenar üçgensel bölgenin alanının 6 katı, "41. Şekil" deki piramidin taban alanı olur.

Kenar uzunluğu 8 br olan eşkenar üçgensel bölgenin alanı,

$A(\widehat{OBC}) = \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4}$

$= 16\sqrt{3}$ br^2 dir.

41. Şekil



Buna göre piramidin taban alanı, $6.16\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$ br^2 dir.

O halde piramidin yüksekliği

$$V = \frac{1}{3}.(\text{Taban Alanı}).(\text{Yükseklik}) \Rightarrow 384\sqrt{3} = \frac{1}{3}.96\sqrt{3}.h$$

$$\Rightarrow 384\cancel{\sqrt{3}} = 32\cancel{\sqrt{3}}.h$$

$$\Rightarrow 384 = 32.h$$

$$h = 12 \text{ br bulunur.}$$

Sıra Sizde

Bir kare dik piramitte tabanın köşegen uzunluğu 10 br ve piramidin hacmi 200 br^3 olduğuna göre piramidin yüksekliğini bulunuz.

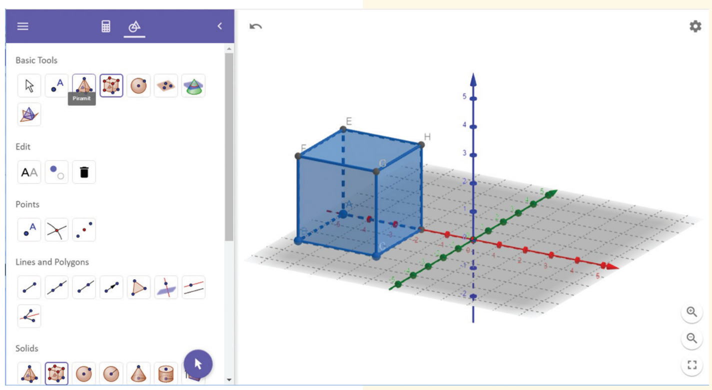
13. Örnek

3 boyutlu dinamik geometri yazılımı kullanarak aynı tabana ve yüksekliğe sahip bir küp ile bir kare dik piramit çizerek hacimleri arasındaki ilişkiyi gösterelim.

3 boyutlu dinamik geometri yazılımında boş bir çalışma sayfası açalım. Açtığımız çalışma sayfasında çizeceğimiz cisimlerin ayrıt uzunluklarını kolayca belirleyebilmek için düzlem üzerine fare yardımıyla sağı tıklayarak "Izgarayı Göster" seçeneğini işaretleyelim.

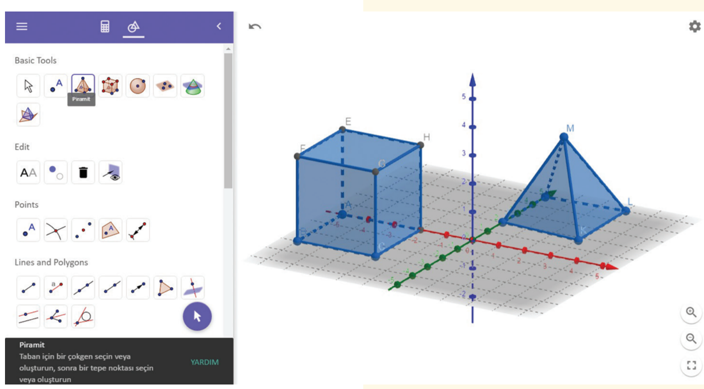
Şimdi sayfanın solundaki araç kutusundan "Küp" ü seçtikten sonra tabanı düzlem üzerinde ve ayrıt uzunluğu 3 br olan bir küp çizelim (42. Şekil).

42. Şekil



Daha sonra araç kutusundan "Piramit"i seçip tabanı düzlem üzerinde bir kare çizip tepe noktasını belirleyelim. Fare yardımıyla tepe noktasını 3 br yukarı sürükleyerek piramidin çizimini tamamlayalım (43. Şekil).

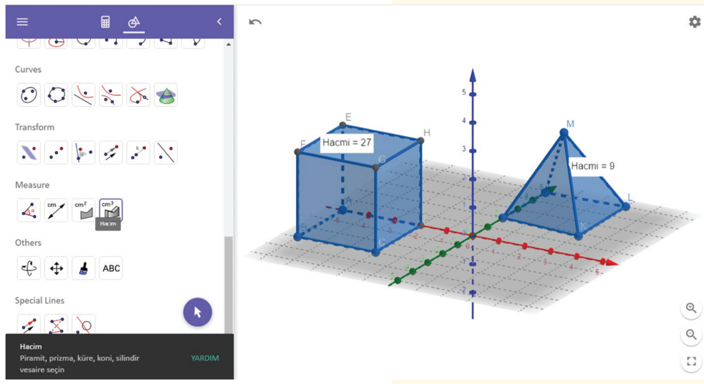
43. Şekil



Son olarak yine araç kutusundan “Hacim” butonunu tıkladıktan sonra küpün ve piramidin üzerlerine birer kez tıklayarak hacimlerini bulalım.

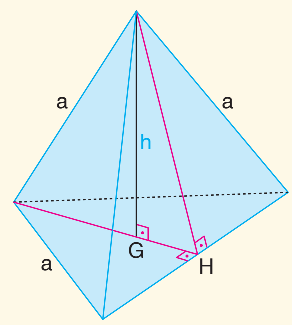
Buradan aynı tabana ve yüksekliğe sahip bir dik prizmanın, bir dik piramidin hacminin 3 katı olduğu görülür (44. Şekil).

44. Şekil



Düzgün Dört Yüzlü	Bütün ayrıtlarının uzunlukları eşit olan üçgen piramide, **düzgün dört yüzlü** denir. Düzgün dört yüzlünün yüksekliği tabana, tabanın ağırlık merkezinde diktir. Ayrıtının uzunluğu a br olan düzgün dört yüzlü için, Yükseklik = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ br Yüzey Alanı = $a^2\sqrt{3}$ br^2 Hacim = $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ br^3 bağıntılarıyla bulunur.

45. Şekil



14. Örnek

Ayrıt uzunluğu a br olan bir düzgün dört yüzlünün yüksekliğini, yüzey alanını ve hacmini veren bağıntıları bulalım.

“46. Şekil”de görülen düzgün dört yüzlünün tepe noktası A, tabanı da BCD eşkenar üçgensel bölgesidir.

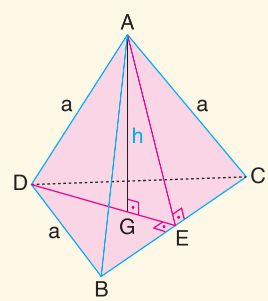
BCD eşkenar üçgensel bölgesinin ağırlık merkezi G noktası olsun. Bu durumda [DE], BCD üçgeninin hem yüksekliği hem de kenarortayıdır.

Kenar uzunluğu a br olan eşkenar üçgenin yüksekliği $|DE| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ br dir.

G noktası kenarortayı $2.|GE| = |DG|$ oranında iki parçaya böleceğinden

$|GE| = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ br dir.

46. Şekil



[AE] da yanal yükseklik olduğundan [DE] na eş olup $|AE| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ br dir.

Cismin yüksekliği tabana G noktasında dik olacağından AGE üçgeni dik üçgendir.

AGE dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa piramidin yüksekliği,

$$|AE|^2 = |AG|^2 + |GE|^2 \Rightarrow |AG|^2 = |AE|^2 - |GE|^2$$

$$\Rightarrow |AG|^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

$$\Rightarrow |AG|^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}$$

$$\Rightarrow |AG|^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$\Rightarrow |AG| = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ br bulunur.}$$

Düzgün dört yüzlünün yüzey alanı, dört eşkenar üçgensel bölgenin alanlarının toplamından,

$$Y.A = 4.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

Düzgün dört yüzlünün hacmi de tüm piramitlerde olduğu gibi taban alanı ile yükseklik uzunluğunun çarpımının üçte biridir.

O halde hacim,

$$V = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{\cancel{3}}.\frac{a^3\cancel{3}\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \text{ br}^3 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

Kenar uzunluğu 6 br olan bir düzgün dört yüzlünün yüksekliğini, yüzey alanını ve hacmini bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

   a. ☐ Prizmaların altını ve üstünü oluşturan çokgensel bölgelere prizmanın tabanları denir.

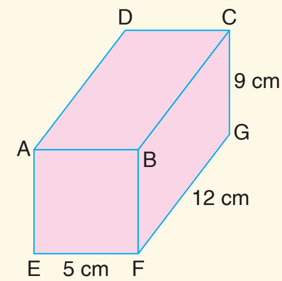
   b. ☐ Dik prizmalarda, tabanlar arasındaki uzaklık prizmanın yüksekliğidir.

   c. ☐ Düzgün piramitlerde yanal yüzler, birbirine eş olan eşkenar üçgensel bölgelerden oluşur.

   d. ☐ Bütün dik piramitlerde yanal ayrıtların tümü piramidin yüksekliğinden kısadır.

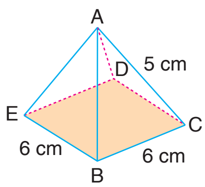
2. "47. Şekil"de ölçüleri verilen dikdörtgenler prizması $[DC]$ ve $[EF]$ ayrıtlarından geçecek bir düzlem ile kesildiğinde oluşan iki prizmanın yüzey alanları toplamı S_1, $[AE]$ ve $[CG]$ ayrıtlarından geçecek başka bir düzlem ile kesildiğinde oluşacak iki prizmanın yüzey alanları toplamı da S_2 olsun. Buna göre, $S_2 - S_1$ farkını bulunuz.

47. Şekil



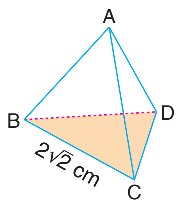
3. Aşağıdaki dik piramitlerin yüzey alanlarını bulunuz.

a. ***48. Şekil***



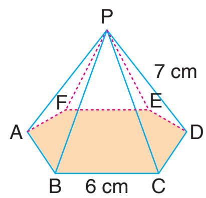
Kare Dik Piramit

b. ***49. Şekil***



Eşkenar Üçgen Dik Piramit (Düzgün Dörtyüzlü)

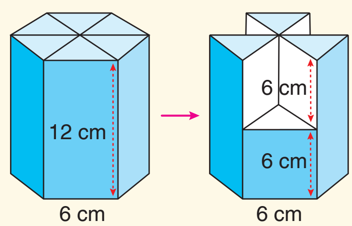
c. ***50. Şekil***



Düzgün Altıgen Dik Piramit

4. Tabanının kenar uzunluğu 6 cm, yüksekliği 12 cm olan düzgün altıgen dik prizmadan "51. Şekil"de gösterildiği gibi 3 eş üçgen dik prizma kesilip çıkarılıyor. Altıgen dik prizma şeklindeki cisimden geriye kalan cismin yüzey alanını bulunuz.

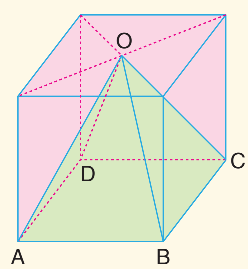
51. Şekil



5. Taban kenarlarının uzunlukları 6 cm ve 12 cm olan dikdörtgenler prizmasının yüksekliği taban çevresinin uzunluğuna eşittir. Buna göre bu dik prizmanın yüzey alanı kaç santimetre karedir?

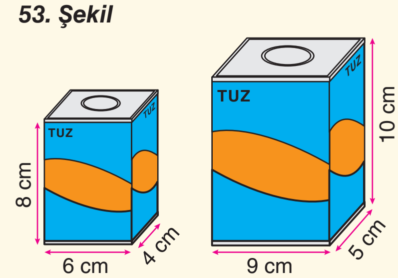
6. Taban çevresinin uzunluğu 36 cm ve yüksekliği 10 cm olan bir düzgün altıgen dik piramidin hacmi kaç santimetre küptür?

52. Şekil



7. Bir marangoz, yüzey alanı 486 cm^2 olan küp şeklinde bir tahtayı oyarak "52. Şekil"de gösterildiği gibi bir kare dik piramit oluşturacaktır. Marangozun oluşturacağı piramidin yüzey alanı kaç santimetre kare olur?

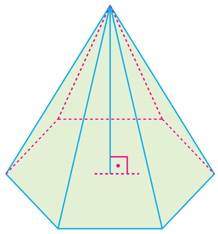
53. Şekil



8. Bir firma iki farklı kutuda tuz satmaktadır. Tuzun fiyatı kutudaki tuz miktarı ile doğru orantılıdır. "53. Şekil"de dikdörtgenler prizması şeklindeki iki kutunun boyutları verilmiştir. Büyük dikdörtgenler prizması şeklindeki kutuda satılan tuzun fiyatı 7,50 TL olduğuna göre küçük dikdörtgenler prizması şeklindeki kutuda satılan tuzun fiyatı kaç TL dir?

6. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Yanda verilen şekildeki geometrik cismin temel özelliklerini belirleyerek noktalı yerlere yazınız.



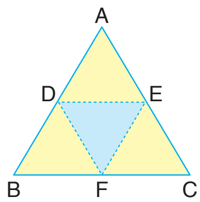
a. Adı: ....

b. Yanal yüz sayısı: ....

c. Tabanı: ....

d. Ayrıt sayısı: ....

2. Yanda verilen şekildeki piramit açınımına göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanlara "D", yanlış olanlara "Y" yazınız.

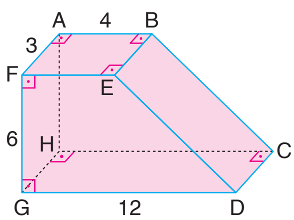


a. ☐ Piramidin tepe noktası E dir.

b. ☐ [DF] piramidin ayrıtlarından birisidir.

c. ☐ $(\widehat{DEF})$ piramidin tabanıdır.

3. Yandaki şekilde verilen prizmanın iki yüzü dik yamuksal, diğer yüzleri de dikdörtgensel bölge şeklindedir.



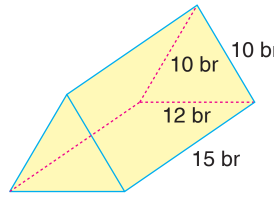
$|AB| = 4$ br,

$|AF| = 3$ br, $|GD| = 12$ br, $|FG| = 6$ br ise prizmanın yüzey alanını bulunuz.

4. Farklı ayrıtlarının uzunlukları x, y ve z br olan bir dikdörtgenler prizmasının hacminin sayısal değeri alanının sayısal değerinin 2 katıdır.

Buna göre $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ kaçtır?

5. Yandaki şekilde tabanı ikizkenar üçgensel bölge olan dik prizma için verilen bilgilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?



I. Taban alanı 48 br^2 dir.

II. Yüzey alanı 100 br^2 dir.

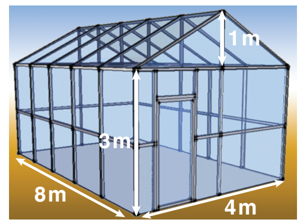
III. Yanal alanı 456 br^2 dir.

IV. Hacmi 720 br^3 tür.

A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II

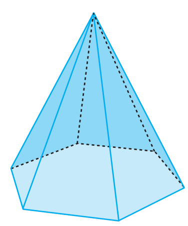
D) III ve IV E) I ve IV

6. Yandaki şekilde gövdesi dikdörtgenler prizması, çatısı üçgen dik prizma olarak inşa edilecek ve tabanı hariç tüm yüzeyi cam ile kaplanacak bir seranın modeli görülmektedir.



Verilen ölçülere göre ihtiyaç duyulacak camın yüzey alanını bulunuz.

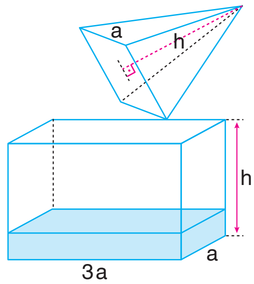
7.



Emrah ile Mine yukarıdaki fotoğrafta görülen kamp çadırının bir modelini yapmıştır. Tabanı düzgün altıgensel bölge şeklinde olan yukarıda verilen şekildeki modelin yanal yüzü, taban kenarının uzunluğu 6 cm ve yüksekliği 9 cm olan birbirine eş 6 tane ikizkenar üçgensel bölgeden oluşmaktadır. Buna göre Emrah ile Mine'nin oluşturduğu çadır modelinin yan yüzey alanını bulunuz.

6. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

8. Yandaki şekilde verilen yükseklikleri eşit dikdörtgenler prizması şeklindeki kap boş, kare dik piramit şeklindeki kap ise su ile dolu iken piramit kaptaki su prizma kaba dolduruluyor.



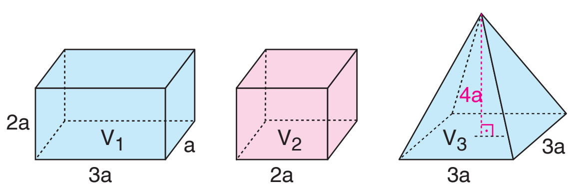
Şekilde verilenlere göre doldurulan suyun yüksekliği prizmanın yüksekliğinin kaçta kaçı olur?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{5}{9}$

9. Taban ayrıtlarının uzunlukları arasında $\frac{4}{9}$, yükseklikleri arasında da $\frac{9}{4}$ oranı bulunan iki kare dik piramidin hacimleri oranı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\frac{16}{81}$ B) $\frac{4}{9}$ C) 1 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

10.



Yukarıdaki şekilde dikdörtgenler prizması küp ve kare dik piramit verilmiştir. Bu cisimlerin hacimleri sırasıyla V_1, V_2 ve V_3 tür.

Verilen ayrıt uzunluklarına göre cisimlerin hacimleri arasındaki ilişki aşağıdakilerden hangisidir?

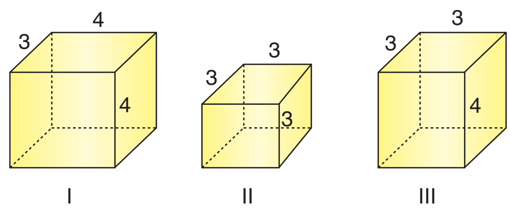
A) $V_1 < V_2 < V_3$ B) $V_2 < V_1 < V_3$
C) $V_3 < V_2 < V_1$ D) $V_1 < V_3 < V_2$
E) $V_2 < V_3 < V_1$

11. Boyutları 4 m, 3 m ve 0,4 m olan dikdörtgenler prizması şeklindeki bir duvarı örmek için boyutları 6 cm, 8 cm ve 12 cm lik dikdörtgenler prizması şeklindeki tuğlalar kullanılmıştır.

Bu duvarın %25 i harçtan oluştuğuna göre bu duvarda kaç tane tuğla vardır?

A) 5436 B) 5536 C) 5840
D) 6060 E) 6250

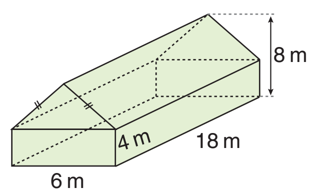
12.



Yukarıdaki şekilde ayrıt uzunlukları verilen prizmaların,

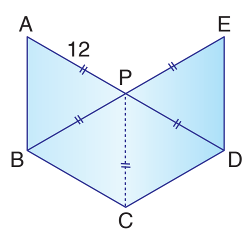
a. Yüzey alanlarını bulunuz.
b. Hacimlerini bulunuz.

13. Yandaki şekilde çatı kısmı dik üçgensel prizma alt kısmı da dikdörtgenler prizması şeklinde olan bir seranın çizgi modeli verilmiştir. Verilen ölçülere göre;



a. Seranın yüzey alanını bulunuz.
b. Seranın hacmini bulunuz.

14. Yandaki şekilde tepe noktası P, ana doğrusu 12 cm ve yan yüzleri eşkenar üçgen olan bir kare piramitin açınımı verilmiştir. Buna göre bu piramidin hacmi kaç cm^3 tür?



A) $124\sqrt{2}$ B) $144\sqrt{2}$ C) $160\sqrt{2}$
D) $240\sqrt{2}$ E) $288\sqrt{2}$

1. ÜNİTE

ÖNCEKİ BİLGİLERİNİ TEST ET

1. a. $\frac{3}{7}$ **b.** 14 **c.** 66 **d.** $\frac{322}{15}$

2. a. $3x(1+x)$ **b.** $a(x+y)(1+x-y)$
c. $(n+1)(n+2)$
d. $ax(3x+1+3a)$

3. a. 7 **b.** 4 **c.** 1

4. a. x^{14} **b.** -108

5. a. 3 **b.** 2

6. a. eşittir. **b.** mavidir.
c. düşük **d.** mavi

7. a. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b. $\frac{1}{6}$
c. $\frac{1}{2}$
d. 3 ten küçük gelme olasılığı daha büyüktür.
e. kesin
f. kesin

1. BÖLÜM ALIŞTIRMALAR

1. 31 **2.** 5.4^9

3. a. 11 **b.** 36

4. a. 294 **b.** 180 **c.** 105 **d.** 146

5. 4^4 **6.** $8.7.6.5.4.3$

7. a. 625 **b.** 505

8. 30 **9.** $\frac{(n+3)^2}{n+2}$ **10.** 6

11. 9 **12.** 5

13. a. 36 **b.** 18

14. a. $13!$ **b.** $11!.3!$
c. $3!.6!.3!.4!$ **d.** $7!\,.\,P(8,2)$

15. a. 124 **b.** 9 **c.** $n = 4$

16. 56 **17.** 84 **18.** 1215

19. a. 1080 **b.** 60 **c.** 12

20. 116 **21.** 378 **22.** 10

23. 16 **24.** 35

25. a. 127 **b.** 56

26. a. $a = 5$ ve $a = 6$

27. a. $a^3 - 6a^2 + 12a - 8$
b. $x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$
c. $32x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1$
d. $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$

28. a. 6^4 **b.** $(-3)^6$ **c.** 1 **d.** 2^9

29. a. $(-2)^7$ **b.** $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ **c.** 0 **d.** 0

30. 5

31. a. D **b.** Y **c.** D **d.** Y

2. BÖLÜM ALIŞTIRMALAR

1. a. D **b.** Y **c.** Y **d.** Y **e.** D

2. a. $E = \{Y, T\}$, $A = \{T\}$
b. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1\}$
c. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
d. $E = \{(1, Y), (2, Y), (3, Y), (4, Y), (5, Y), (6, Y), (1, T), (2, T), (3, T), (4, T), (5, T), (6, T)\}$
$A = \{(3, Y)\}$

3. a. kesin – imkânsız
b. eş olasılı olmayan
c. gerçekleşmez
d. 1

4. a. 1 **b.** 0 **c.** 1

5. a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{3}{4}$ **6.** $\frac{4}{5}$

7. a. $\frac{1}{4}$ **b.** $\frac{3}{4}$ **c.** $\frac{1}{18}$

8. $\frac{1}{3}$

9. vurma $= \frac{2}{3}$, vuramama $= \frac{1}{3}$

10. a. artar **b.** azalır **c.** $\frac{1}{6}$

11. 4

1. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

1. a. 24 **b.** 720 **c.** 40320 **d.** 72
e. 712 **f.** 504 **g.** 3 **h.** 720
i. $\frac{9!}{3!}$ **j.** 56 **k.** 7 **l.** 220
m. 240 **n.** $\frac{133}{12}$ **o.** $\frac{9}{10!}$ **p.** $\frac{145}{12!}$

2. 45 **3.** 24

4. a. 7 **b.** 1

5. a. 13 **b.** $\binom{13}{3}$

6. 2^{20} **7.** 841 **8.** 225

9. A **10.** C **11.** $4!.4!.2!$

12. 22 **13.** 6 **14.** C

15. a. 70 **b.** 130

16. 112 **17.** 20 **18.** 7 **19.** 56

20. a. 0 **b.** 8 **21.** $\frac{2}{11}$ **22.** $\frac{1}{3}$

23. $\frac{1}{3}$ **24.** 15 **25.** $\frac{1}{3}$ **26.** $\frac{2}{5}$

27. A **28.** $\frac{5}{7}$ **29.** D **30.** B

31. D **32.** E **33.** E **34.** B

35. C **36.** A

2. ÜNİTE

ÖNCEKİ BİLGİLERİNİ TEST ET

1. a. 3n **b.** 2n – 1
c. 3n – 1 **d.** 4n + 1

2. a. 3 **b.** –6 **c.** 11 **d.** 9

3. $A \times B = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$
$B \times A = \{(5, 1), (5, 2), (6, 1), (6, 2)\}$

4. $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$

5. 3 **6.** E

CEVAP ANAHTARI

1. BÖLÜM ALIŞTIRMALAR

1. a. ✗ b. ✓ c. ✓ d. ✗ e. ✗

2. a. ✓ b. ✗ c. ✗ d. ✓

3. a. $f = \{(-2, -3), (-1, 0), (0, 1), (1, 0)\}$
b. $f(A) = \{-3, 0, 1\}$

4. a. $\{1, 2, a, c, d\}$ b. $\{3, 1, 2, -1\}$
c. $\{-2, -2/3, -3/4\}$ d. $\{0, 2, 5/3\}$

6. a. $\{(A, F), (B, S), (C, S), (D, T)\}$, E tuşu açıkta kaldığından fonksiyon değildir.
b. E butonuna basıldığında bir tür kahve vermesi sağlanabilir.

7. a. $2 ; 1 ; 5$ b. $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4}$
c. $2 ; \sqrt{5} ; 3$ d. $3 ; 2 ; 0$
e. $-4 ; 5 ; 4$

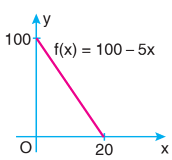
8. a. 1 b. 5

9. a. $[1, \infty)$ b. $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ c. $\mathbb{R}$ d. $(-2, \infty)$

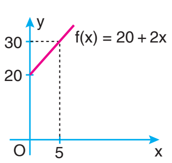
10. a. $m = -1$ $n = 2$ b. $m = 0$ $n = 3$
c. $m = -2$ $n = 1$

11. a. -1 b. -3 c. 5

12. $f(x) = 100 - 5x$, $f:[0, 20] \to [0, 100]$



13. $f(x) = 20 + 2x$, $f:[0, \infty) \to [20, \infty)$



14. 11

15. a. bire bir ve örten
b. bire bir ancak örten değil
c. bire bir ancak örten değil

16. a. tek b. ne tek ne çift
c. çift d. çift

17. -1

18. a. Y b. Y c. D d. D

19. a. $2f = \{(1, -6), (2, -2), (3, -8), (4, -4)\}$
b. $f+g = \{(1, -5), (2, -5), (3, -5), (4, -5)\}$
c. $2f-3g = \{(1, 0), (2, 10), (3, -5), (4, 5)\}$
d. $f.g = \{(1, 6), (2, 4), (3, 4), (4, 6)\}$
e. $f/g = \{(1, 3/2), (2, 1/4), (3, 4), (4, 2/3)\}$

20. D

21. a. fonksiyon değildir. b. fonksiyondur.

22. a. $f:\mathbb{R} \to (-\infty, 3]$ b. $h:\mathbb{R} \to [-1, 1) \to \mathbb{R}$
c. $k:\mathbb{R} \to (1, \infty]$ d. $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

23. a. $f(-5) = 2$, $f(-3), = -1$, $f(-2) = 2$, $f(1) = 1$, $f(4), = 0$
c. 3 tane

2. BÖLÜM ALIŞTIRMALAR

1. a. Y b. Y c. D d. D

2. Bileşke fonksiyonlar II. dereceden olacağından grafikler $g(x)$ in grafiğine benzer.

3. a. $f(x) = x - 2$, $g(x) = x + 7$
b. $gof(x) = x + 5$
c. 7 ve 8 d. 1

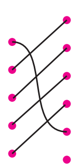
4. a. $-2x - 1$ b. $-2x + 4$
c. $-3x$ d. $-3x + 4$
e. $6x - 1$ f. $6x - 8$

5. a. -9 b. 4

6. a. Yazılabilir b. Yazılamaz
c. a şıkkındaki fonksiyon bire bir değil ancak örtendir.

7. a. ✓ b. ✓
c. ✓ (bire bir ve örten değil)
d. ✓ e. ✗ (bire bir ve örten değil)
f. ✓

8.



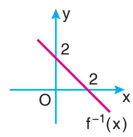
9. a. $3x + 11$ b. $\frac{8-x}{2}$ c. $\frac{8x-1}{3}$
d. 14 e. -7 f. $-\frac{1}{3}$

10. $\frac{11}{4}$

11. a. $\frac{5-x}{3}$ b. $\frac{3-x}{3}$ c. $5 - 3x$
d. $\frac{5-x}{3}$ e. $\frac{3-x}{3}$ f. 8
g. -2 h. -1

12. -3

13. Sadece f in tersi bulunabilir. g, bire bir olmadığından tersi bulunamaz.



14. a. 1 b. 1 c. 0 d. 0

15. A **16.** D **17.** E **18.** C **19.** D

20. E

2. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

1. a. ✓ b. ✗ c. ✗ d. ✗

2. $f(1) = 6$, $h(-1) = 1$

3. a. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ b. $\mathbb{R}$ c. $[-4, \infty)$

4. $\frac{1}{5}$ **5.** 3 **6.** 4 **7.** 8

8. a. bire birdir.
b. bire bir değildir.

9. a. f, içine b. g , örten

10. a. tek b. çift c. çift d. tek

11. 2 **12.** E

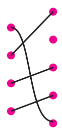
13. a. $-2x$ b. -5 c. $-x - 5$
d. $5x - x^2$ e. $\frac{x}{5-x}$ f. $\frac{x}{3x-5}$

14. B **15.** A **16.** B **17.** A **18.** $\frac{4x+6}{3}$

19. a. $3x - 11$ **b.** $\frac{x+7}{2}$ **c.** $-1 - 2x$

d. 11 **e.** -7 **f.** $-\frac{1}{3}$

20. a.

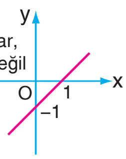


21. 2 **22.** $\frac{3x-19}{2}$

23. $8x + 1$ **24.** $6x + 20$ **25.** 17 **26.** A

27. E

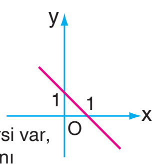
28. a.



tersi var, aynı değil

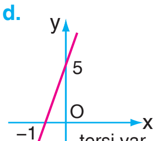
b. tersi yok (1 = 1 değil)

c.



tersi var, aynı

d.



tersi var, aynı değil

29. E

3. ÜNİTE

ÖNCEKİ BİLGİLERİNİ TEST ET

1. a. $8x - 32$ **b.** $7 - x$
c. $2x + 17$ **d.** $13x - 8$
e. $6 - 6x$ **f.** $4 - x^2$

2. a. $3x(4 + x)$ **b.** $2x(2x - 3)$
c. $x^2(x + 1)$ **d.** $2x(2x^2 + x - 3)$
e. $4(x - 2)$ **f.** $3x(1 - 2x^2)$

3. a. $(x + 1)^2$ **b.** $(x - 1)^2$
c. $(x + 2)^2$ **d.** $(x + 3)^2$
e. $(x - 5)^2$ **f.** $(x - 10)^2$

4. a. 4 **b.** 6 **c.** 8
d. 64 **e.** 16 **f.** 14

5. a. $(x - 2)(x + 2)$ **b.** $(x - 3)(x + 3)$
c. $(x - 1)(x + 1)$ **d.** $(x - 5)(x + 5)$
e. $(x - 6)(x + 6)$ **f.** $(x - 7)(x + 7)$

6. a. $x^2 - 1$ **b.** $x^2 - 4$
c. $x^2 - 100$ **d.** $25 - x^2$
e. $x^2 - 36$ **f.** $x^2 - 64$

7.

1. BÖLÜM ALIŞTIRMALAR

1.

Fonksiyon	Polinom mu? (E veya H)	Polinomun Derecesi	Polinomun Başkatsayısı	Polinomun Sabit Terimi	Polinomun Katsayılar Toplamı
$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 4$	E	4	3	4	6
$f(x) = 4x^3 - \sqrt{2}x^2 + 5$	E	3	4	5	$9 - \sqrt{2}$
$f(x) = 3$	E	0	3	3	3
$f(x) = 2\sqrt{x} - 2$	H	–	–	–	–
$f(x) = 4x^2 - \frac{2}{x} + 1$	H	–	–	–	–
$f(x) = x^3 - 3x^4 - 1$	E	4	–3	–1	–3
$f(x) = 5 - \sqrt[3]{x}$	H	–	–	–	–

3. a. sabit polinom **b.** sıfır polinomu
c. – **d.** –
e. – **f.** sabit polinom
g. – **h.** sıfır polinomu

4. $a = -4$, $b = -1$, $c = -3$,
$m = -\frac{1}{2}$, $n = -6$

5. a. Y **b.** D **c.** Y

6. $(R + 1)^2 = R^2 + 2R + 1$,
katsayılar toplamı = 4

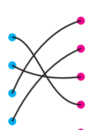
7. a. $P(x) + Q(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4x$
$P(x) - Q(x) = -2x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 6x + 2$

b. $P(x) + Q(x) = x^7 - x^6 + \frac{10}{3}x^5 - 8x - 1$

$P(x) - Q(x) = -3x^7 + x^6 + \frac{8}{3}x^5 - 8x + 15$

8. a. $P(x) = 10x - 0{,}02x^2 - 500$
b. $P(200) = 700$ **9.** C

10.



11. -16 **12.** 0

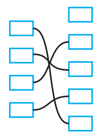
13. $P(x) = 6x^2 - 2x$, $P(2) = 20$

14. a. $B(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 52x + 156$
$K(x) = -467$

b. $B(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1$
$K(x) = -2$

c. $B(x) = -2x^3 - 1$
$K(x) = 1$

15.



16. $P(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x + 3$

17. $x^2 + 2x + 5$

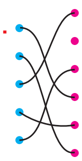
18.

Polinomlar	der[P(x)]	der[Q(x)]	der[P(x) + Q(x)]	der[P(x).Q(x)]	der$\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right]$	der[$P^2(x)$]	der[$Q(x^3)$]
$P(x) = x^6 + x^4 - x^2 - 1$ $Q(x) = x^4 - 1$	6	4	6	10	2	12	12
$P(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1$ $Q(x) = x^2 - 2x - 1$	3	2	3	5	1	6	6

20. $P(1) = \underbrace{a + b + c + d + e + f}_{0} \Rightarrow P(1) = 0$ dır.

O hâlde $P(x)$, $x - 1$ ile tam bölünür.

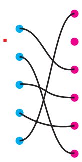
21.



22. $x^2 + 2x + 1$

2. BÖLÜM ALIŞTIRMALAR

1.



2. a. $(x - b)(y - b)$
b. $(m - n)(1 - a - b)$
c. $(1 - x)(m + 2)$
d. $(2 - m)(x - y + 2)$
e. $(p - 3)(x^2 - ma^2)$
f. $(x - 1)(x + 1)(x - 1)$
g. $(a + b)(-1 - x^2)$
h. $(x^2 + y^2)(2x + 3y)$

CEVAP ANAHTARI

i. $(a-1)(a+1)(b-1)(b+1)$

j. $(x-1)(x^2+x+1)(x+1)$

k. $(x-m)(xm-2)$

l. $(bc-ad)(ac+bd)$

3. a. $6(x+y+6)$

b. $8(4+a+b+c)$

4. E **5.** $3x+6$

6. a. $(x+2b)^2$ **b.** $(2y-3)^2$

c. $(2a+3b)^2$ **d.** $(2ab-c)^2$

e. $(a+b-1)^2$ **f.** $(-2y)^2$

g. $b(a+4b)^2$ **h.** $xy(2x-3y)^2$

i. $2m(m-7)^2$ **j.** $b^3(a+b)^2$

k. $(y-8)(y+8)$

l. $(5-3ab)(5+3ab)$

m. $(6c^2-9)(6c^2+9)$

n. $2(3x-y)(3x+y)$

o. $3(2ab-3m)(2ab+3m)$

p. $3xy(2x-5y^2)(2x+5y^2)$

7. a. $4x^2+4x+1$ **b.** $9-6a^2+a^4$

c. $2x^2+\frac{2\sqrt{2}}{3}x+\frac{1}{9}$ **d.** $\frac{a^2}{4}-2\sqrt{5}a+20$

8. a. $(40-1)(40+1)=1599$

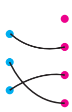
b. $(50-4)(50+4)=2484$

c. $(20-3)(20+3)=391$

d. $(40-3)(40+3)=1591$

9. a. $\frac{x^2}{4}-1$ **b.** $x^{2m}-4y^{2n}$

c. $(a+b)^2-9x^2$

10. 

11. a. 72 **b.** 17 **c.** 27 **d.** 20 **e.** 25

12. a. $8+12t+6t^2+t^3$

b. $6\sqrt{3}-10$

c. $a^3-9a+\frac{27}{a}-\frac{27}{a^3}$

13. a. $(1+m)(1-m+m^2)$

b. $8(1-b)(1+b+b^2)$

c. $(x^2-y)(x^4+x^2y+y^2)$

14. a. $(1-5t^2)(1+5t^2+25t^4)$

b. $(xa-b)(x^2a^2+xab+b^2)$

c. $3(3m-n)(9m^2+3xm+n)$

d. $2x(1-3x)(1+3x+9x^2)$

e. $mx^4(x-m)(x^2+xm+m^2)$

f. $3y(2x-1)(4x^2+2x+1)$

g. $a(a^2+4b^2)(a^4-4a^2b^2+16b^4)$

h. $2x(5x+4)(25x^2-20x+16)$

i. $(5-x)(x^2-x+7)$

15. a. Y **b.** Y **c.** D

16. a. $(x-5)(x-1)$ **b.** $(x-4)(x+2)$

c. $(x-3)(x+2)$ **d.** $(t-2)(t-1)$

e. $(m-4)(m+6)$ **f.** $(a-2)(a+6)$

g. $(2x-7)(x+1)$ **h.** $(2a-2)(2a-1)$

i. $(x^2-4x+8)(x^2+4x+8)$

17. a. $(3^x+4)(3^x-1)$

b. $(2^{x+1}-3)(2^x-1)$

c. $(3x^2-1)(x^2+2)$

d. $(x+2)(x-1)(x^2+x+1)$

18. a. $\frac{18}{x}$ **b.** $\frac{18}{x-3}$

19. a. $\frac{1}{a-2b}$ **b.** $\frac{6a}{a^2-4}$

c. $\frac{-m^2-3n^2}{mn(m+2n)}$ **d.** $\frac{9x+6}{(x-4)(x+3)^2}$

20. a. $\frac{x-y}{x+y}$ **b.** 2

c. $\frac{2}{m+n}$ **d.** $\frac{-(2x+5)}{(x+3)(x+2)}$

3. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Terim sayısı = 5, $der[P(x)]=5$,

başkatsayısı = 1

II. dereceden terimin katsayısı = $\sqrt{21}$

III. dereceden terimin katsayısı = 0

2. 7 **3.** $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

4. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ bir polinom olmadığından derecesinden söz edilemez.

5. a. D **b.** Y **c.** D **d.** Y

6. E **7.** D

8. $16x^2+84x+109$

9. $P(x)=3x^3+3,\ Q(x)=x^3+5x^2-4$

10. 7

11. a. $B(x)=3x^2-2x+7$

$K(x)=-4x+15$

b. $B(x)=2x^2-2x-2$

$K(x)=2x^2+2x+1$

12. 10 **13.** -3 **14.** 121

15. a. $(x+3)(y+z)$ **b.** $(a+b)(3y+4x)$

16. $(mx-ny)(my-nx)$

17. $\frac{3}{2}x+4$

18. a. $(y+3)(y+4)$ **b.** $(k-2)^2$

c. $(y-m)(2x-z)$ **d.** $(3x-1)(t-2m)$

e. $(2m-n)(mn+t)$

f. $(m+n-p)(m+n+p)$

g. $(x+2y-p)(x-2y+p)$

h. $(2x).(2y)$

i. $(m+n+p-1)(m+n+p+1)$

j. $2(a+b)[3(a+b)-2][3(a+b)+2]$

k. $5(x-y)^3[2(x-y)-1][2(x-y)+1]$

l. $(x+3y-z)(x+3y+z)$

m. $(m-n-2)(m-n+2)$

n. $(a-2m-3n)(a+2m+3n)$

o. $15(x-1)(5x+1)$

p. $(ab-5)(ab+1)$

r. $(2x-y)(x^2-xy+y^2)$

s. $(5x-5)(x-2)$

t. $(6x-1)(x+2)$

u. $3x(3x-4)(3x+4)$

v. $(a-5b)(a+5b-1)$

19. a. ✓ b. ✓ c. ✗ d. ✓

20. a. $\dfrac{x(3x-1)}{(x-1)(x+1)}$ b. $\dfrac{2}{3}$

c. $\dfrac{(a-b)(a+b)}{a^3}$ d. 1

21. a. $\left\{\dfrac{5}{12}\right\}$ b. $\{-3, 1\}$ c. $\{1\}$ d. $\varnothing$

22. 144 23. 6

24. a. 4 b. 3 c. 3

25. –6 26. D 27. B 28. D 29. A

30. D 31. A 32. B 33. C 34. C

35. B 36. D 37. E 38. E

4. ÜNİTE

ÖNCEKİ BİLGİLERİNİ TEST ET

1. a. $\{-6\}$ b. R

2. 3 3. 2 4. –3 5. $\{(5,3)\}$

6. a. –6 b. 5 c. $\dfrac{5}{2}$

7. E

8. a. I b. VII c. VI d. II

9. a. $3a(a+2)$ b. $2(y+2)(y+2)$
c. $(2x-3)(2x+3)$ d. $(b-3)(b-3)$

1. BÖLÜM

ALIŞTIRMALAR (İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü)

1. $\{4, 5, 6\}$ 2. –3

3. a. 29 b. –4 c. 17

4. a. VIII b. IV c. V d. I
e. III f. VI g. II h. VII

5. 2

6. a. D b. Y c. D d. D
e. D f. Y

7. $(-2, \infty)$

8. A → 15 km/Sa. , B → 20 km/Sa.

9. 45 10. B

11. C 12. $-\dfrac{1}{4}$

ALIŞTIRMALAR (Karmaşık Sayılar)

1. a. $5\sqrt{2}i$ b. $\sqrt{30}i$ c. $\dfrac{i}{2\sqrt{3}}$
d. $-\sqrt{11}i$ e. 2i

2. a. $Re(z_1) = -1$, $Im(z_1) = -1$

b. $Re(z_2) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $Im(z_2) = -\dfrac{1}{2}$

c. $Re(z_3) = 0$, $Im(z_3) = -2\sqrt{2}$

d. $Re(z_4) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $Im(z_4) = -4$

3. a. V b. IV c. II d. III

4. a. $Ç = \left\{\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right\}$

b. $Ç = \{-1-i, -1+i\}$

c. $Ç = \{2-3i, 2+3i\}$

d. $Ç = \left\{\dfrac{1}{2}-i, \dfrac{1}{2}+i\right\}$

5. a. Y b. D c. Y d. D

6. 6

ALIŞTIRMALAR (İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Kökleri ile Katsayıları Arasındaki ilişkiler)

1. a. Y b. D c. D d. Y

2. –1 3. p.q = 3

4. $x^2 - 22x + 21 = 0$

5. $5x^2 + x - 1 = 0$

6. $x^2 - 5x - 2 = 0$

4. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $-\dfrac{3}{2}$ 2. –1 3. A 4. 2

5. 2 6. –20 7. –4

8. a. R de $\varnothing$, C de $\{-\sqrt{3}i, \sqrt{3}i\}$

b. R de $\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

c. C de $\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

9. a. Y b. D c. D d. Y

10. $\dfrac{-3}{2}i$ 11. 2 12. $\dfrac{23}{18}$

13. –8 14. $x^2 + 6x + 9 = 0$

15. –26

5. ÜNİTE

ÖNCEKİ BİLGİLERİNİ TEST ET

1. $x = 22°$, $y = 6°$, $z = 67°$

2. 140 3. 144 4. 156

5. 44 6. $4\sqrt{5}$ br

1. BÖLÜM

ALIŞTIRMALAR (Çokgenler)

1. a. Y b. D c. Y d. D e. D

2. 7 3. 120° 4. 110°

5. 150° 6. D

2. BÖLÜM

ALIŞTIRMALAR (Dörtgenlerin kenar ve açı özellikleri)

1. 130° **2.** 155° **3.** $\sqrt{65}$

4. 4 **5.** 38

3. BÖLÜM

ALIŞTIRMALAR (Yamuk)

1. 60° **2.** 2 **3.** 15 **4.** 15

5. 29 **6.** 20 **7.** 6 **8.** 96

9. $\frac{2}{7}$ **10.** 24 **11.** $\frac{7}{5}$ **12.** 3

ALIŞTIRMALAR (Paralelkenar ve Eşkenar Dörtgen)

1. 40° **2.** 90° **3.** 19 **4.** $2\sqrt{119}$

5. 4 **6.** 25° **7.** 120° **8.** 12

9. 30° **10.** 56

11. a. Y **b.** Y **c.** D **d.** D **e.** D

12. $24\sqrt{6}$ **13.** 48 **14.** 30 **15.** 50

16. 72 **17.** 3 **18.** $32\sqrt{3}$ **19.** 24

ALIŞTIRMALAR (Dikdörtgen ve Kare)

1. $\sqrt{3}$ **2.** $\frac{1}{5}$ **3.** $4\sqrt{6}$ **4.** 6

5. 3 **6.** 60 br^2 **7.** 24 br^2 **8.** 24 br^2

9. $16\sqrt{3}$ **10.** 9 br^2 **11.** 12 br^2

12. 6,4 **13.** $4\sqrt{2}(3+\sqrt{3})$

14. $\frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$ **15.** 48 **16.** 16 **17.** 8

ALIŞTIRMALAR (Deltoid – Dörtgenlerin Alan Problemleri)

1. 90 **2.** $10\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$ **3.** 30

4. 2 **5.** 12 **6.** $4\sqrt{2}$

7. 240 **8.** 36 **9.** 4 br

10. a. Y **b.** Y **c.** Y **d.** D **e.** D

11. a. 20412 cm^2 **b.** 28188 cm^2
c. 7776 cm^2

12. 28 br^2

13. Alanı: 2500 cm^2, Çevresi: $100\sqrt{5}$ cm

14. 16

15. a. 4050 cm^2 **b.** $150 + 30\sqrt{13}$ cm

5. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

1. 165° **2.** 165°

3. a. $4\sqrt{2}$ br **b.** $\frac{17}{2}$ **c.** $\sqrt{37}$ br

4. 64 br **5.** $\frac{3456}{25}$ br^2 **6.** $80\sqrt{3}$ br

7. 60° **8.** 16 **9.** $32\sqrt{3}$

10. 44 **11.** 12 **12.** 55° **13.** 72

14. 60° **15.** 12 **16.** 60 **17.** 38°

18. 20 br^2 **19.** $56\sqrt{5}$ **20.** 15° **21.** 12

22. $\frac{3}{2}$ **23.** 90° **24.** 31 **25.** $12\sqrt{3}$

26. a. Dikdörtgen, kare
b. Paralelkenar, dikdörtgen, kare, eşkenar dörtgen
c. Yamuk
d. Kare, eşkenar dörtgen, deltoid
e. Paralelkenar, dikdörtgen, kare, eşkenar dörtgen

27. a. 6 **b.** 18 **c.** 10

28. 3 **29.** 16 br^2 **30.** B

31. 10 **32.** 74

6. ÜNİTE

ÖNCEKİ BİLGİLERİNİ TEST ET

1.

Geometrik Cisim / Adı ve Özellikleri								
Cismin adı	Küp	Kare prizma	Dikdörtgenler prizması	Üçgen prizma	Altıgen prizma	Kare priamit	Üçgen piramit	Koni
Yanal yüz sayısı	4	4	4	3	6	4	3	–
Ayırt sayısı	12	12	12	9	18	8	6	–
Köşe sayısı	8	8	8	6	12	5	4	1

2. 60

3. 10 **4.** 140 cm^2

5. a. 528 cm^2 **b.** $540+\frac{81\sqrt{3}}{2}$ cm^2
c. 708 cm^2

ALIŞTIRMALAR

1. a. D **b.** D **c.** Y **d.** Y

2. 84 cm^2

3. a. 84 cm^2 **b.** $8\sqrt{3}$ cm^2
c. $54\sqrt{3}+36\sqrt{10}$ cm^2

4. $108\sqrt{3}+540$ cm^2 **5.** 1440

6. $180\sqrt{3}$ **7.** $81+81\sqrt{5}$

8. 3,20

6. ÜNİTE SONU DEĞERLENDİRME SORULARI

1. a. Altıgen dik piramit **b.** 6
c. Altıgensel bölge **d.** 12

2. a. Y **b.** D **c.** D

3. 192 **4.** $\frac{1}{4}$ **5.** E

6. $76+16\sqrt{5}$ m^2 **7.** 162 cm^2 **8.** A

9. B **10.** A **11.** E

12. a. $A_I = 80$ **b.** $V_I = 48$
$A_{II} = 54$ $V_{II} = 27$
$A_{III} = 66$ $V_{III} = 36$

13. a. 396 m^2 **b.** 648 m^3

14. E

A

açıortay: Bir açıyı ölçüleri eşit iki açıya ayıran ışın.

B

benzerlik: İki geometrik şeklin karşılıklı kenar uzunluklarının orantılı olması veya karşılıklı açılarının eş olması.

benzerlik oranı: Benzer iki geometrik şeklin karşılıklı kenar uzunluklarının oranlanmasıyla bulunan sabit sayı.

boş küme: Elemanı olmayan küme.

Ç

çarpanlara ayırma: Bir ifadeyi en az iki ifadenin çarpımı biçiminde gösterme.

D

denklem: Bilinmeyenin bazı değerleri için sağlanan eşitlik.

denklemi çözmek: Denklemi sağlayan değerleri (kökleri) bulma işlemi.

derece: Açı ölçme birimi.

doğru parçası: İki nokta arasında kalan doğrudaş noktaların kümesi.

E

eşit: Belli bir bakımdan (ölçüsü, uzunluğu, alanı, vb.) birbirinden fazla ya da eksik olmayan.

G

gerçek sayılar: Doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümesinin hepsini içeren küme (“ $\mathbb{R}$ ” ile gösterilir.) .

H

hane: Ev, konut.

İ

ihraç: Yurt dışına mal satma.

imajiner: Sanal birim, i sayısı.

imkânsız olay: Hiç elemanı olmayan olay, boş küme.

irrasyonel sayılar: Rasyonel olmayan (devirli ondalık açılımları olmayan) sayılar.

ispat: Bir teoremin hükmünün doğru olduğunun gösterilmesi.

K

kenarortay: Bir üçgende bir kenarın orta noktasını karşı köşeye birleştiren doğru parçası.

koordinat sistemi: Başlangıç noktalarından birbirine dik olarak konumlandırılmış iki sayı doğrusunun oluşturduğu sistem.

M

maliyet: Bir malın elde edilinceye kadar harcanan değerlerin toplamı.

S

sera: Sebze ya da meyvelerin yetiştirildiği ve hava şartlarına karşı korunduğu yer.

sıralı ikili: Kartezyen çarpım kümesinin her bir elemanı.

Ü - V - Y

üs: Bir kuvvete yükseltilmiş bir sayının üzerine yazılan ve kaçıncı kuvvete yükseltildiğini gösteren sayı.

Venn şeması: Bir kümenin elemanlarının kapalı bir eğri içinde yazılarak gösterilmesi.

yükseklik: Bir üçgende ya da özel bir dörtgende bir köşeden karşı kenara ya da kenarın uzantısına indirilen dikme.

KAYNAKÇA

1. Barnett, R. A. (2001). *Precalculus: functions and graphs.* New York: McGraw-Hill.

2. Boyd, C. (2008). *Geometry*. New York: Glencoe / McGraw-Hill.

3. Cajori, F. (1929). *A history of mathematical notations (2 volumes).* Illinois: The Open Court Publishing Co.

4. Haese, R. (2002). *Mathematics for year 10.* South Australia: Haese & Harris Publications.

5. Holliday, B. (2005). *Algebra 1.* New York: Glencoe / McGraw-Hill.

6. Katz, V. J. (1993). *A history of mathematics: an introduction.* New York: Harper Collins College Publishers.

7. Larson, R. (1998). *Geometry: an integrated approach.* New York: McDougal Littell.

8. Schlager, N. ve Lauer, J. (2001). *Science and its times.* Hampshire: Gale Group.

9. Thomas, G. B. (2005). *Thomas' calculus.* Boston: Pearson Education.

10. *T.C. Millî Eğitim Bakanlığı matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar).* (2018). Ankara: MEB Yayınları.

11. *T.C. Millî Eğitim Bakanlığı matematik dersi öğretim programı (ortaöğretim 9, 10, 11 ve 12. Sınıflar).* (2018). Ankara: MEB Yayınları.

12. *Türkçe sözlük.* (2012). Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

13. *Yazım kılavuzu.* (2012). Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

14. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk (Erişim tarihi: 20.02.2018, Kullanıldığı Sayfa: 8, 23, 61, 83, 114, 172, 188)

15. https://islamansiklopedisi.org.tr (Erişim tarihi: 24.02.2018, Kullanıldığı Sayfa: 7, 21, 32, 115, 173, 177, 180)

GÖRSEL KAYNAKÇA

- Kitabımızdaki "http://www.shutterstock.com" adresinden satın alınan görsellerin sayfa numaraları ve görsel kodları aşağıda verilmiştir.

Sayfa 1/1: 748478692, 1/2: 730090819 ve 683367751, 1/3: 464922605
Sayfa 3/1: 48935314, 3/2: 1074074870
Sayfa 7: 127688339
Sayfa 9: 515722999
Sayfa 11: 158990714
Sayfa 13/1: 51656611, 13/2: 400892836
Sayfa 14/2: 129457256
Sayfa 26: 684869881
Sayfa 30: 709669678
Sayfa 35: 684711430
Sayfa 44/1: 130076777, 44/2: 71240899, 44/3: 1012530736
Sayfa 46: 585943382
Sayfa 55: 274363919
Sayfa 56: 352089608

Sayfa 59: 154517030
Sayfa 61: 112913404
Sayfa 65: 221639947
Sayfa 70: 564574480
Sayfa 79: 147192056
Sayfa 86: 153314975
Sayfa 92: 112249904
Sayfa 97: 97494074
Sayfa 98: 76616923
Sayfa 110/1: 143229013, sayfa 110/2: 690887317, sayfa 110/3: 98244404
Sayfa 111: 482465884
Sayfa 120: 117868978
Sayfa 123: 117992443
Sayfa 125: 739709668
Sayfa 132: 161229197
Sayfa 135/2: 112445300
Sayfa 137: 140658412
Sayfa 138: 111920786
Sayfa 157: 146517671
Sayfa 160/1: 129014315, 160/2: 82205074
Sayfa 164: 69139204
Sayfa 169/1: 138714158, 169/2: 718886848, 169/3: 529749235
Sayfa 175: 101641516
Sayfa 181/1: 62925526, 181/2: 651085897
Sayfa 202/1: 560350387, 202/2: 468063914, 202/3: 182009693
Sayfa 203: 137017601
Sayfa 205: 215093260
Sayfa 211/1: 152333594, 211/2: 111655868
Sayfa 215: 533025451
Sayfa 231: 160750238
Sayfa 249: 151100432
Sayfa 268: 115996627
Sayfa 270: 657933469
Sayfa 280/1: 58228975, 280/2: 625387967, 280/3: 3664192
Sayfa 285: 85357222
Sayfa 288: 101252926
Sayfa 289: 271210649
Sayfa 298: 514450675

- Sayfa 14/1: https://www.nvi.gov.tr/
- Sayfa 127: yayınevimize aittir
- Sayfa 135/1: yayınevimize aittir
- Sayfa 272: http://ismek.ist/files/ismekOrg/Image/img_brans/brans_yenisitegaleri/tezhip/7.jpg
- Kitabımızdaki çizimler yayınevimizin görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.